M.M. POSTNIKOV

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE

4e semestre
1
GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

M. POSTNIKOV

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE

SEMESTRE IV

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

VOLUME 1

URSS
MOSCOU
1994

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Ce livre continue les *Variétés différentiables* *). Il s'agit d'un autre manuel (plus complet que le cours de géométrie qu'on lit aujourd'hui) à l'intention des étudiants en mathématiques des Universités. Dans la préface des *Variétés différentiables*, nous avons suffisamment parlé du but général de la série. Ce but reste toujours le nôtre, mais cet ouvrage diffère un peu des volumes déjà parus. Le fait est que l'enseignement de la géométrie dans les Universités soviétiques ne repose sur aucun principe directeur, ou peu s'en faut. Tandis que l'analyse a, par exemple, pour elle la tradition tant en ce qui concerne les manuels qu'en matière des conférences, les géomètres nagent complètement : quels matériaux inclure dans le programme ? comment les enseigner ? comment les exposer ? Ce n'est qu'après avoir bien « rodé » plusieurs manuels conçus dans des optiques différentes qu'un professeur peut fixer délibérément le contenu et le style même de son cours. Pour l'instant, tout manuel doit servir à de nombreux cours obligatoires différemment orientés, ce qui en augmente sensiblement le volume. Par contre, il laisse aux enseignants une grande liberté de manœuvre, et les esprits éveillés en tirent beaucoup plus qu'ils n'apprennent pendant la leçon.

La branche des mathématiques appelée géométrie différentielle est née comme théorie des courbes et des surfaces de l'espace euclidien qu'on traite par les instruments de l'analyse. Après Riemann, on se concentre progressivement sur les variétés munies d'une métrique riemannienne quelconque. L'étude du transport parallèle en géométrie de Riemann aboutit à la notion générale des connexions sur les fibrés principaux (ou vectoriels) arbitraires, mais cela après une longue période où l'on se fait siens les nouveaux concepts. Cette notion, substratum de la géométrie différentielle moderne, joue un rôle exceptionnel dans d'autres disciplines mathématiques d'orientation géométrique, voire en physique.

De tout temps, les liens entre la géométrie différentielle et la physique ont été très étroits. Il est bien connu que Riemann a exposé pour la première fois ses idées dans la Leçon inaugurale de 1854, mais peu savent qu'il les a développées en 1867 à propos d'un problème théorique de la conduction de la chaleur. Avec la Relativité d'Einstein, ces liens se sont consolidés au point que certains ont parlé (peut-être prématurément) de la géométrisation de la physique.

---

*) Voir M. Postnikov, *Leçons de géométrie. Variétés différentiables*, éd. Mir, Moscou, 1990. Dans la suite, on désigne ce livre par III. (Le chiffre arabe qui suit III est le numéro de la leçon. On emploie les mêmes notations pour les livres I et II.)

De nos jours, on trouve à ces deux disciplines un nouveau trait d'union, savoir les potentiels des champs de jauge sont exactement les connexions sur tel ou tel fibré principal.

Il est donc souhaitable (pourquoi pas nécessaire ?) que la théorie générale des connexions soit incorporée dans le cours obligatoire de géométrie destiné aux mathématiciens en herbe (le problème ne se pose pas depuis longtemps pour les physiciens qui étudient ces questions sous le titre «Champs de jauge»). Et, assez curieusement, quatre ou cinq leçons suffisent pour exposer le strict nécessaire. Il est vrai qu'on néglige de sorte nombre de détails et de ramifications dont on ne se passe qu'à peine. Le lecteur les trouvera dans ce manuel (ce qui en a doublé le volume) sous forme des matériaux facultatifs à étudier essentiellement soi-même. Quant aux thèmes plus concrets (espaces à connexion affine, espaces symétriques, espaces de Riemann, formes spatiales de Cayley-Klein, théorème de Gauss-Bonnet, calcul des variations des géodésiques, etc.), partie intégrante du cours, on les exposera dans le livre suivant de la série.

De nombreuses pages traitent les problèmes qui ne sont liés à la géométrie différentielle que de façon indirecte, si bien que le titre du présent ouvrage est plus ou moins conventionnel. (Il suffit de dire que la géométrie différentielle proprement dite commence seulement dans la leçon 10.) Presque trois leçons sont consacrées aux groupes de Lie.

La topologie figure par le biais de la théorie des revêtements et du groupe fondamental dont la nécessité pour le cours obligatoire est, paraît-il, universellement admise. On considère les classes caractéristiques comme êtres de la géométrie différentielle et on introduit à ce propos les K-groupes qu'on applique ensuite au problème de la parité de l'invariant de Hopf. (On rappelle que la notion des groupes d'homologie a été abordée dans la dernière leçon de III.) Dans les trois dernières leçons, le problème des sphères parallélisables ou non fait appel aux groupes d'homotopie dont on examine les propriétés élémentaires.

Les thèmes majeurs sont exposés avec force détails (il y en a même trop peut-être ; voir, par exemple, les connexions sur les fibrés des repères de la leçon 18). Par ailleurs, désireux de garder un volume raisonnable, nous étudions maintes questions non moins importantes sous forme de problèmes (accompagnés en revanche d'Indications très circonstanciées).

Comme dans le livre III, le texte en petits caractères est celui des matériaux non géométriques (analytiques en général) et de certains problèmes (parmi les plus ardus), les problèmes restants étant en fait des exercices banaux destinés exclusivement à quiconque désire vérifier les connaissances acquises.

A la différence des *Variétés différentiables*, les leçons du livre sont un peu plus longues que les conférences. Que le conférencier

fasse son choix : exposera-t-il une partie des matériaux sans démonstration ? en fera-t-il des problèmes ? renvoiera-t-il les auditeurs à un manuel ? D'autre part, on comprend que les leçons de la fin de la deuxième année doivent être plus substantielles et se dérouler à un rythme plus rapide que celles du premier semestre.

On sait que l'habitude de telles notations automatise la pensée et aide à la compréhension du texte, tandis que les symboles inédits risquent de vous embrouiller même quand il s'agit des choses connues. Aussi, tout faiseur de manuels doit respecter l'usage et être très prudent dans son œuvre d'innovation. Or, la géométrie différentielle est sur ce plan dans un état déplorable car les notations y diffèrent d'ordinaire d'une branche à l'autre (et d'un manuel à l'autre). L'auteur a fait de son mieux pour unifier les notations sans s'écarter trop de la tradition. Tout ne lui a pas réussi. Que le lecteur ne soit donc pas choqué s'il voit que la projection π d'un fibré est des fois désignée par la lettre p qui figure ailleurs un point (ou un indice).

La table des matières très détaillée renseigne sur le contenu concret du livre. Aussi nous nous bornons à de brefs commentaires.

La Première leçon est une sorte d'introduction dont on n'a en fait besoin que lorsqu'on a affaire aux fibrés principaux. Mais la négliger complètement, c'est se priver d'une vue d'ensemble de la question et rétrécir son horizon. Nous conseillons de la passer en première lecture pour y revenir chaque fois que la nécessité s'en fait sentir.

Les leçons 2 à 5 sont consacrées aux revêtements et au groupe fondamental. L'exposé y est concentrique, si bien qu'on peut omettre la leçon 5, voire se borner aux leçons 2 et 3, car dans chaque cas, on reçoit une information plus ou moins exhaustive. (C'est également vrai pour certaines leçons suivantes.)

Dans la leçon 6, on introduit les fibrés vectoriels, thème numéro un du livre. On peut commencer par cette leçon, mais on ne saurait s'en passer.

La leçon 7 illustre la réduction du groupe structural d'un fibré vectoriel par l'exemple des fibrés métrisables. Dans la leçon 8, on examine les variétés différentiables qui admettent une structure presque complexe et on établit en particulier les valeurs de n pour lesquelles une sphère de dimension n est presque complexe ou parallélisable.

La réduction du groupe structural dans le cas général est étudiée dans la leçon 9 et on introduit à ce propos la notion de géométrie de Klein.

On aborde la géométrie différentielle proprement dite dans la leçon 10 (on l'a déjà dit d'ailleurs), où l'on définit géométriquement la connexion sur un fibré vectoriel en tant qu'une espèce de champ de sous-espaces horizontaux. On peut la lire immédiatement après la leçon 6.

La leçon 11 présente les dérivées covariantes dont on établit la correspondance biunivoque avec les connexions.

Dans la leçon 12, on décrit le transport de la connexion (=dérivation covariante) d'un fibré vectoriel donné sur ses puissances tensorielles quelconques. L'auteur a voulu que ce transport précède la construction de la multiplication tensorielle (et en constitue la motivation). On considère certes, en plus de la multiplication tensorielle, les foncteurs continus arbitraires.

La notion de produit tensoriel de fibrés aidant, on introduit la différentielle covariante (début de la leçon 13). La partie restante de la leçon et deux leçons suivantes sont consacrées à la théorie des groupes de Lie. (Dans la pratique, on adjoint la fin de la leçon 14 à la leçon 15.)

Les leçons 16 et 17 familiarisent le lecteur avec les connexions sur les fibrés principaux qu'on compare ensuite avec celles sur les fibrés vectoriels. On les réduit aisément à une leçon et demie (voire à une seule) aux dépens des exemples et des explications détaillées.

Dans la première partie de la leçon 18, on introduit le groupe d'holonomie et on démontre (moyennant les théorèmes généraux de la leçon 15) qu'il s'agit d'un groupe de Lie, puis qu'un fibré est réductible à son groupe d'holonomie. Lorsqu'il lit son cours, le professeur n'a pas à se soucier outre mesure de la rigueur ni des notations, si bien que les deux démonstrations sont rapides et faciles. La seconde partie de la leçon (qui n'est pas liée directement à la première) établit que chaque fibré vectoriel sur une variété séparée paracompacte admet au moins une connexion et qu'il est donc trivialisable au-dessus de tout voisinage sphérique.

Dans la leçon 19, on calcule le transport parallèle le long d'un lacet et on asseoit dessus la notion de tenseur de courbure. On discute d'autres définitions du tenseur. En omettant deux dernières parties, on peut lire cette leçon immédiatement après la leçon 11.

La leçon 20 est centrée sur le problème d'exprimer les éléments du groupe d'holonomie à l'aide du tenseur de courbure. Une discussion heuristique est suivie du théorème d'Ambrose-Singer qui fournit la réponse voulue. A cet effet, on détermine le transport parallèle, la forme de courbure et le groupe d'holonomie pour les fibrés principaux quelconques.

Dans la leçon 21, un théorème d'existence des relèvements horizontaux (nécessaire au cas général d'Ambrose-Singer) est démontré pour les fibrés principaux quelconques. On discute une deuxième définition de la forme de courbure des connexions sur un fibré principal, l'identité de Bianchi et l'équation de structure d'Elie Cartan. On expose enfin la construction quaternionique des instantons.

Sur ce, on en finit au fond avec la géométrie différentielle, et on revient (après une brève incursion dans la théorie des champs

de jauge de Yang-Mills) à la topologie (leçon 22). On présente la théorie des classes caractéristiques de Weyl (qu'on retrouve dans la leçon 23) qui s'inspire des principes de la géométrie différentielle, et les idées clefs de la théorie des K-groupes. Dans la leçon 24, on prouve (avec des lacunes) le théorème d'Adams sur la parité de l'invariant de Hopf pour $n \neq 2, 4, 8$ et on examine en détail ses divers homologues algébriques.

La leçon 25 étudie les fibrés au-dessus des sphères. On introduit à ce propos les groupes d'homotopie.

Dans la leçon 26, on calcule les groupes $\pi_n S^m$, $n \leqslant m$, et on démontre un théorème de Hopf (application des variétés dans les sphères de même dimension).

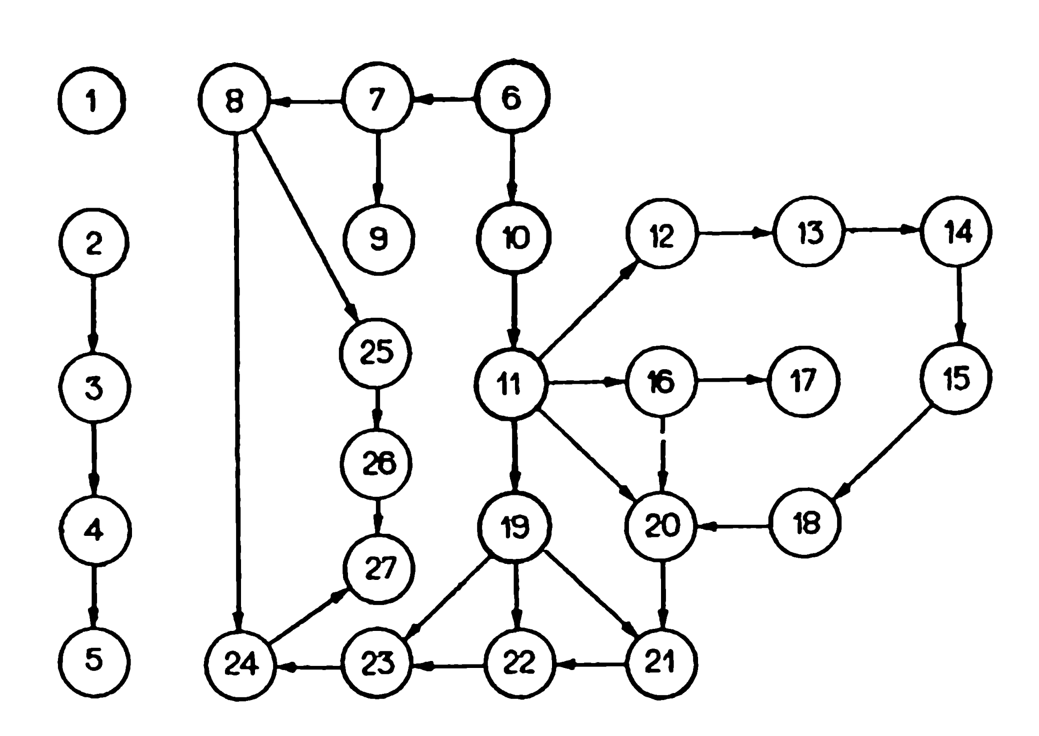
La leçon finale expose (avec force lacunes) un procédé de calcul des $K_{\mathbf{C}}$-groupes des sphères et leur application au problème de l'invariant de Hopf.

L'Annexe *in fine* a été ajouté sur épreuves.

Ce sont les leçons 6, 10, 11 et 19 qui constituent le cœur du livre. Le cours de géométrie (réduit à l'extrême) lu à la Faculté mécanico-mathématique (voir préface des *Variétés différentiables*) se borne à ces leçons (et à une partie des leçons 5 et 12), après quoi on passe à la géométrie de Riemann.

Nous répétons une fois de plus que la géométrie de Riemann et les questions afférentes feront l'objet du volume suivant.

LEITFADEN



LEÇON PREMIÈRE

Fibrés et morphismes de fibrés. — Topologie quotient et espace quotient. — Actions des groupes. — Groupes topologiques et différentiables et leurs actions. — Fibrés principaux. — Fibrés à groupe structural. — Sections des fibrés. — Fibrés localement triviaux.

Le substantif « fibré » fait penser à un ensemble $\mathscr{E}$ partagé (fibré) en fibres, sous-ensembles disjoints non vides. Soient $\mathscr{B}$ l'ensemble de toutes les fibres, et $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ l'application qui fait correspondre à chaque point $p \in \mathscr{E}$ la fibre ambiante. L'application π est définie de façon unique par le fibré qu'elle détermine univoquement à son tour. Cela étant, chaque surjection $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ donne un fibré de $\mathscr{E}$ (formé des images réciproques $\pi^{-1}(b)$ des points $b \in \mathscr{B}$). Dans le cas topologique (quand $\mathscr{E}$ est un espace topologique), on considère naturellement π comme application continue. Tout ce que nous venons de dire permet et justifie la

Définition 1. On appelle *fibré* un triplet

$$\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$$

quelconque, où $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ sont deux espaces topologiques et $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ est une application continue (qui est de règle surjective). L'espace $\mathscr{E}$ est l'*espace total* (ou encore *espace fibré*) du fibré ξ. $\mathscr{B}$ est l'*espace de base* de ξ. Un fibré de base $\mathscr{B}$ est également dit *fibré sur* (ou *au-dessus de*) $\mathscr{B}$. L'application $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ est la *projection* de ξ. L'image réciproque $\mathscr{F}_b = \pi^{-1}(b)$ de tout point $b \in \mathscr{B}$ constitue la *fibre* de ξ au-dessus de b.

Remarque 1. Donner $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$, c'est donner $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$, si bien que la composante médiane du triplet $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ définit univoquement les deux autres. Aussi, le fibré $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ coïncide du point de vue formel avec l'application π. La seule différence est que π est une règle selon laquelle on fait correspondre à chaque $p \in \mathscr{E}$ le point $\pi(p) \in \mathscr{B}$, tandis que le fibré fait correspondre à chaque point $b \in \mathscr{B}$ le sous-espace $\mathscr{F}_b$.

Mais il y a des fois avantage à oublier cette différence et appeler *fibré* une application $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$.

S'il faut insister sur la dépendance de $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ et π vis-à-vis de ξ, on écrira $\mathscr{E}^\xi$, $\mathscr{B}^\xi$ et π^ξ (et $\mathscr{E}(\xi)$, $\mathscr{B}(\xi)$, $\pi(\xi)$ pour des raisons d'ordre typographique).

Un fibré $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ est dit *de fibre-type* si les fibres $\mathscr{F}_{b_1}$ et $\mathscr{F}_{b_2}$ sont homéomorphes pour $b_1, b_2 \in \mathscr{B}$ quelconques, i.e. s'il

existe un espace topologique $\mathscr{F}$ tel que la fibre $\mathscr{F}_b$ soit homéomorphe à $\mathscr{F}$ pour tout $b \in \mathscr{B}$. L'espace $\mathscr{F}$ défini univoquement à un homéomorphisme près s'appelle *fibre-type* de ξ.

Il est clair que la projection de tout fibré de fibre-type est une surjection.

Soient $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ et $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B}')$ deux fibrés. Une application continue $\varphi: \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ qui transforme chaque fibre $\mathscr{F}_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in \mathscr{B}$, de ξ dans une fibre $\mathscr{F}_{b'}$ de ξ' est une application *fibre à fibre*. Elle définit par la formule $\psi(b) = b'$ l'application $\psi: \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ (qui n'est pas continue en général) telle que $\pi' \circ \varphi = \psi \circ \pi$, i.e. telle que le diagramme

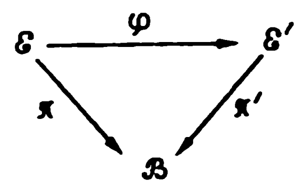
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \xrightarrow{\varphi} & \mathscr{E}' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ \mathscr{B} & \xrightarrow{\psi} & \mathscr{B}' \end{array} \tag{1}$$

soit commutatif. Si ψ est continue, l'application fibre à fibre φ est un *morphisme* de ξ dans ξ', ce qui se note $\varphi: \xi \to \xi'$.

Puisque ψ est caractérisée de façon unique comme ligne inférieure de (1), on peut dire que $\varphi: \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est un morphisme $\varphi: \xi \to \xi'$ si et seulement s'il existe une application continue $\psi: \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ qui clôt le diagramme (1). Dans ce cas, c'est des fois le couple (φ, ψ) qui s'appelle morphisme $\xi \to \xi'$.

Un morphisme $\varphi: \xi \to \xi'$ est un *isomorphisme* si φ et ψ sont des homéomorphismes, i.e. si l'on définit l'application continue $\varphi^{-1}: \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ qui constitue un morphisme $\xi' \to \xi$. Deux fibrés ξ et ξ' sont *isomorphes* s'il existe au moins un isomorphisme $\xi \to \xi'$.

Si $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$ et $\psi = \mathrm{id}$, l'application fibre à fibre φ (qui est nécessairement un morphisme) est un *morphisme sur* $\mathscr{B}$, et on a le diagramme commutatif



Un morphisme sur $\mathscr{B}$ est un *isomorphisme sur* $\mathscr{B}$ s'il est un homéomorphisme (donc un isomorphisme). Deux fibrés ξ et ξ' de même base $\mathscr{B}$, isomorphes sur $\mathscr{B}$, sont *isomorphes*.

Problème 1. Démontrer que, si π est une application ouverte (transforme des ensembles ouverts dans des ensembles ouverts), toute application fibre à fibre $\mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est un morphisme de ξ dans ξ'. S'agissant des fibrés dont les projections constituent des applications ouvertes, les morphismes sont donc exactement les applications fibre à fibre (et les isomorphismes ne sont autres que des homéomorphismes fibre à fibre).

* * *

Une application continue $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ s'appelle *application quotient* si un ensemble $U \subset \mathscr{B}$ est ouvert dans $\mathscr{B}$ si et seulement si l'ensemble $\pi^{-1} U$ l'est dans $\mathscr{E}$. Une surjection quotient est dite *épimorphe.* Dire « une application épimorphe » équivaut à dire « un *épimorphisme* ».

Problème 2. Montrer que toute application continue fermée ou ouverte est une application quotient.

Problème 3. Montrer qu'un épimorphisme $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ est une application ouverte si et seulement si l'ensemble $\pi^{-1}(\pi V)$ est ouvert dès que $V \subset \mathscr{E}$ l'est.

Quelle que soit la relation d'équivalence $\sim$ sur un espace topologique $\mathscr{E}$, on topologise naturellement l'ensemble $\mathscr{B} = \mathscr{E} / \sim$ de toutes les classes d'équivalence par la condition que la projection canonique

(2) $$\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}, \quad p \mapsto [p],$$

soit un épimorphisme. Autrement dit, un ensemble $U \subset \mathscr{B}$ est ouvert dans $\mathscr{B}$ si et seulement si son image réciproque $\pi^{-1}U = \{p \in \mathscr{E}; [p] \in U\}$ l'est dans $\mathscr{E}$.

Cette topologie sur $\mathscr{B}$ s'appelle *topologie quotient*, et l'ensemble $\mathscr{B}$ muni de la topologie quotient est un *espace quotient.* [On peut dire de la topologie quotient que c'est la topologie la plus *faible* sur $\mathscr{B}$, i.e. le nombre d'ensembles ouverts par rapport auxquels la projection (2) est continue est maximum pour cette topologie.]

Bien qu'elle soit un épimrorphisme, la projection (2) peut ne pas être une application ouve te.

* * *

Une classe des relations d'équivalence importante pour lesquelles (2) est ouverte a trait aux actions des groupes.

On dit qu'un groupe $\mathscr{G}$ *opère à gauche* sur un ensemble $\mathfrak{E}$ (ou en est le *groupe de transformations*) si l'on définit l'application

(3) $$\mathscr{G} \times \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}, \quad (a, \mathrm{p}) \mapsto a\mathrm{p}, \quad a \in \mathscr{G}, \quad \mathrm{p} \in \mathfrak{E},$$

telle qu'on ait pour $a, b \in \mathscr{G}$ et $\mathrm{p} \in \mathfrak{E}$ quelconques

$$e\mathrm{p} = \mathrm{p}, \quad a(b\mathrm{p}) = (ab)\mathrm{p},$$

avec e l'unité du groupe $\mathscr{G}$.

On définit de manière analogue l'*action à droite* :

(4) $$\mathfrak{E} \times \mathscr{G} \to \mathfrak{E}, \quad (\mathrm{p}, a) \mapsto \mathrm{p}a.$$

Quel que soit $a \in \mathscr{G}$, l'application

$$L_a: \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}, \quad \mathrm{p} \mapsto a\mathrm{p},$$

est bijective et $a \mapsto L_a$ constitue un homomorphisme de $\mathcal{G}$ dans le groupe Sym $\mathcal{E}$ de toutes les bijections $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$ sur lui-même.

Cet homomorphisme est la *représentation de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{E}$ associée à l'action* (3). Il est clair que la correspondance

$$\text{action} \Leftrightarrow \text{représentation associée}$$

entre toutes les actions (3) possibles et tous les homomorphismes $\mathcal{G} \to \text{Sym}\,\mathcal{E}$ possibles est biunivoque.

Une action (3) est dite *effective* si la représentation associée est un monomorphisme, i.e. s'il existe pour tout élément $a \neq e$ de $\mathcal{G}$ un élément $\mathrm{p} \in \mathcal{E}$ tel que $a\mathrm{p} \neq \mathrm{p}$. Une action (3) est *libre* si $a\mathrm{p} = \mathrm{p}$, $\mathrm{p} \in \mathcal{E}$ quelconque, a lieu pour $a = e$ seul. Chaque action libre est, c'est manifeste, effective.

L'action (3) définit sur $\mathcal{E}$ une relation d'équivalence $\sim$ telle que $\mathrm{p} \sim \mathrm{q}$ si et seulement si l'on trouve $a \in \mathcal{G}$ pour lequel $\mathrm{q} = a\mathrm{p}$. Les classes d'équivalence correspondantes constituent les *orbites* de (3). Etant donné deux orbites quelconques, elles sont ou bien confondues, ou bien disjointes. Une orbite contenant $\mathrm{p} \in \mathcal{E}$ est formée de tous les éléments $a\mathrm{p}$, $a \in \mathcal{G}$. Elle se note $\mathcal{G}\mathrm{p}$. L'ensemble de toutes les orbites est désigné par $\mathcal{E}/\mathcal{G}$. Il est lié à $\mathcal{E}$ par l'application surjective naturelle de passage au quotient

(5) $$\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{G}, \quad \mathrm{p} \mapsto \mathcal{G}\mathrm{p}.$$

L'application

$$j_{\mathrm{p}}: \mathcal{G} \to \mathcal{G}\mathrm{p}, \quad a \mapsto a\mathrm{p},$$

est surjective pour tout élément $\mathrm{p} \in \mathcal{E}$. Pour qu'elle soit une bijection pour chaque $\mathrm{p} \in \mathcal{E}$, il faut et il suffit que l'action (3) soit libre.

* * *

La multiplication et l'opération de passage à l'élément inverse dans tout groupe $\mathcal{G}$ définissent les applications

(6) $$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \quad (a, b) \mapsto ab,$$

(7) $$\mathcal{G} \to \mathcal{G}, \quad a \mapsto a^{-1}.$$

Un groupe $\mathcal{G}$ muni d'une topologie qui fait de (6) et (7) des applications continues, est dit *topologique*. Pareillement, un groupe $\mathcal{G}$ est un *groupe de Lie* (ou *groupe différentiable*) si on lui confère une structure différentiable pour laquelle (6) et (7) sont des applications différentiables.

Problème 4. Montrer que si (6) est différentiable pour $\mathcal{G}$ une variété différentiable, il en est de même de (7) (i.e. $\mathcal{G}$ est un groupe de Lie). [On note que dans le cas des groupes topologiques, l'affirmation analogue n'est pas juste.]

Une action d'un groupe topologique $\mathcal{G}$ sur un espace topologique $\mathfrak{E}$ est *continue* si l'application (3) est continue; il est sous-entendu que l'ensemble $\mathcal{G} \times \mathfrak{E}$ est muni de la topologie de produit direct. On dit de même qu'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ opère *différentiablement* sur une variété différentiable $\mathfrak{E}$ si (3) est différentiable par rapport à la structure différentiable sur $\mathcal{G} \times \mathfrak{E}$ qui est le produit de structures différentiables des variétés $\mathcal{G}$ et $\mathfrak{E}$.

Un espace topologique (resp. variété différentiable) $\mathfrak{E}$ muni d'une action continue (resp. différentiable) d'un groupe topologique (resp. différentiable) $\mathcal{G}$ s'appelle *$\mathcal{G}$-espace* (resp. *$\mathcal{G}$-variété*). Un $\mathcal{G}$-espace ($\mathcal{G}$-variété) est *effectif* ou *libre* s'il en est ainsi pour l'action (3).

On confère à l'espace des orbites $\mathfrak{E}/\mathcal{G}$ d'une action continue (ou différentiable) la topologie quotient, si bien que la projection naturelle (5) se trouve être un épimorphisme. Cet espace, est-il une variété différentiable pour une action différentiable ? La réponse est négative dans le cas général. On verra plus loin les conditions sous lesquelles elle est positive, mais on se borne pour l'instant aux actions continues. Il va de soi que tous les résultats topologiques que nous allons obtenir sont automatiquement valables pour les actions différentiables.

Si (3) est une action continue, la bijection L_a: $\mathfrak{E} \to \mathfrak{E}$ est continue pour tout $a \in \mathcal{G}$ et admet l'inverse continue $L_{a^{-1}}$, i.e. c'est un homéomorphisme. Aussi, l'ensemble $aV = L_a(V)$ est ouvert dès que $V \subset \mathfrak{E}$ l'est. Par conséquent, il en est de même de

$$\bigcup_{a \in \mathcal{G}} aV = \bigcup_{\mathrm{p} \in V} \mathcal{G}\mathrm{p}.$$

Mais cet ensemble n'est évidemment autre que l'image réciproque $\pi^{-1}(\pi V)$ par π de πV. Comme π est épimorphe par construction, il en découle que πV est ouvert dans $\mathfrak{E}/\mathcal{G}$. Ainsi, *l'application* (5) *est épimorphe* (*voire ouverte*) *pour toute action* (3) *continue.*

On conçoit que ces résultats se transportent de suite au cas des actions à droite (4) à la différence essentielle près que la représentation associée est un antihomomorphisme. S'agissant d'une action à droite, l'ensemble des orbites est noté $\mathfrak{E}/\mathcal{G}$ cette fois aussi, et l'application $\mathrm{p} \mapsto \mathrm{p}a$ est désignée par R_a. (On utilise des fois le symbole $\mathcal{G}\diagdown\mathfrak{E}$ pour l'espace des orbites de l'action à gauche, mais nous nous en garderons de règle, vu qu'il va mal avec les autres notations, disons avec $=$.)

Ainsi, chaque $\mathcal{G}$-espace à droite $\mathfrak{E}$ est l'espace total du fibré $\xi = (\mathfrak{E}, \pi, \mathfrak{E}/\mathcal{G})$, où la projection

(8) $$\pi: \mathfrak{E} \to \mathfrak{E}/\mathcal{G}, \quad \mathrm{p} \mapsto \mathrm{p}\mathcal{G},$$

est une surjection ouverte.

Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux $\mathscr{G}$-espaces quelconques (pour fixer les idées, on les suppose des espaces à droite). Une application $\varphi: \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est dite *équivariante* si elle commute avec l'action du groupe $\mathscr{G}$, i.e. si

$$\varphi(\mathrm{p}a) = \varphi(\mathrm{p})\, a$$

pour tout point $\mathrm{p} \in \mathscr{E}$ et tout élément $a \in \mathscr{G}$.

Il est clair que chaque φ équivariante est une application fibre à fibre de $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{E}/\mathscr{G})$ dans $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{E}'/\mathscr{G})$, et c'est un morphisme de ξ dans ξ' du moment que (8) est ouverte.

En particulier, *chaque homéomorphisme équivariant* $\varphi: \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ *est un isomorphisme* $\xi \to \xi'$.

Les isomorphismes $\xi \to \xi'$, homéomorphismes équivariants $\mathscr{E} \to \to \mathscr{E}'$, sont également appelés *$\mathscr{G}$-isomorphismes.*

* * *

On considère pour toute action à droite continue (4) le sous-espace $\mathscr{E}^*$ du produit $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ formé des couples $(\mathrm{p}, \mathrm{q}) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$, où p et q appartiennent à une même orbite de (4), i.e. tels que $\mathrm{q} = = \mathrm{p}a$ pour un élément a de $\mathscr{G}$. Si l'action (4) est libre, a est défini de façon unique. Soit $\tau(\mathrm{p}, \mathrm{q})$ cet élément. Il vient une application

$$\tau: \mathscr{E}^* \to \mathscr{G} \tag{9}$$

qui s'appelle *translation*.

Définition 2. Si l'application (9) est continue, le fibré $\xi = = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{E}/\mathscr{G})$ est un *$\mathscr{G}$-fibré principal de groupe structural $\mathscr{G}$*, et l'espace $\mathscr{E}$ (muni de l'action à droite libre de $\mathscr{G}$) est un *$\mathscr{G}$-espace principal.* Quant à l'action (3), on dit qu'elle est *principale.*

On constate aisément que *la bijection continue*

$$j_{\mathrm{p}}: \mathscr{G} \to \mathrm{p}\mathscr{G}, \quad a \mapsto \mathrm{p}a, \quad a \in \mathscr{G},$$

est un homéomorphisme pour tout $\mathscr{G}$-fibré principal $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{E}/\mathscr{G})$ *et tout point* $\mathrm{p} \in \mathscr{E}$. En effet, $j_{\mathrm{p}}(\tau(\mathrm{p}, \mathrm{q})) = \mathrm{q}$ pour tout $\mathrm{q} \in \mathrm{p}\mathscr{G}$ par définition, si bien que l'application continue

$$\mathrm{q} \mapsto \tau(\mathrm{p}, \mathrm{q}), \quad \mathrm{q} \in \mathrm{p}\mathscr{G},$$

est l'inverse de j_{p}. □

Cela signifie que *chaque $\mathscr{G}$-fibré principal est un fibré de fibre-type espace du groupe* $\mathscr{G}$ (on dit par abus de langage que la fibre-type est en l'occurrence le groupe $\mathscr{G}$).

Exemples de fibrés principaux.

Exemple 1. Quels que soient l'espace topologique $\mathscr{B}$ et le groupe topologique $\mathscr{G}$, le produit $\mathscr{E} = \mathscr{B} \times \mathscr{G}$ est un $\mathscr{G}$-espace à droite pour l'action

$$(b, a)\, g = (b, ag), \quad b \in \mathscr{B}, \quad a, g \in \mathscr{G}.$$

Cette action est libre, et le sous-espace $\mathscr{E}^*$ est formé des couples $((b_1, a_1), (b_2, a_2))$ tels que $b_1 = b_2$. Cela étant, la translation (9) est donnée par la formule

$$\tau\,((b, a_1), \quad (b, a_2)) = a_1^{-1}a_2;$$

c'est donc une application continue. Dans ce cas, l'espace quotient $\mathscr{E}/\mathscr{G}$ s'identifie de façon naturelle à $\mathscr{B}$; si bien qu'*on définit pour tout* $\mathscr{B}$ *et tout* $\mathscr{G}$ *le fibré principal*

$$(10) \qquad (\mathscr{B} \times \mathscr{G}, \pi, \mathscr{B}), \quad où\ \pi\,(b, a) = b, \quad b \in \mathscr{B},\ a \in \mathscr{G},$$

de groupe structural $\mathscr{G}$ *et de base* $\mathscr{B}$.

Les fibrés (10), ainsi que tout fibré principal qui leur est $\mathscr{G}$-isomorphe, s'appellent *fibrés principaux triviaux*.

Exemple 2. Un groupe topologique $\mathscr{G}$, sous-groupe d'un groupe abstrait Γ et sous-espace d'un espace topologique Γ, est un *sous-groupe* d'un groupe topologique Γ. Le groupe Γ est évidemment un $\mathscr{G}$-espace à droite libre pour la restriction à $\Gamma \times \mathscr{G}$ de la multiplication $\Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$. L'ensemble Γ^* est dans ce cas formé de tous les couples $(x, y) \in \Gamma \times \Gamma$ tels que $x^{-1}\, y \in \mathscr{G}$, et la translation (9) est définie par

$$\tau\,(x, y) = x^{-1}y.$$

Par conséquent, la translation est continue, et la projection

$$\Gamma \rightarrow \Gamma/\mathscr{G}, \quad x \mapsto x\mathscr{G}, \quad x \in \Gamma,$$

est donc un $\mathscr{G}$-*fibré principal* dont la base $\mathscr{B} = \Gamma/\mathscr{G}$ a pour éléments les classes à gauche $x\mathscr{G}$ du groupe Γ suivant le sous-groupe $\mathscr{G}$.

Problème 5. Un espace topologique $\mathscr{X}$ est dit *régulier* si chaque point $p \in \mathscr{X}$ est fermé (i.e. s'il en est ainsi de tous les singletons $\{p\} \subset \mathscr{X}$) et s'il existe pour tout voisinage U d'un point p quelconque de $\mathscr{X}$ un voisinage V de p tel que $\overline{V} \subset U$. (Cf. définition plus faible 4 de III.14.)

Démontrer que

1° *tout espace régulier est séparé*;

2° *l'espace* $\Gamma/\mathscr{G}$ *des classes à gauche du groupe* Γ *suivant le sous-groupe* $\mathscr{G}$ *est régulier (donc séparé) si et seulement si* $\mathscr{G}$ *est fermé.*

Remarque 2. L'affirmation 2° ne dit rien sur la topologie de Γ (en particulier, on ne fait pas l'hypothèse de Γ séparé). Aussi, elle entraîne en particulier qu'*on a les affirmations équivalentes suivantes pour tout groupe topologique* Γ:

1) *l'unité* e *de* Γ *est fermée*;
2) *le groupe* Γ *est un espace topologique séparé*;
3) Γ *est un espace topologique régulier.*

Problème 6. Démontrer que quels que soient le groupe de Lie Γ et son sous-groupe de Lie fermé $\mathscr{G}$ (i.e. un sous-groupe qui est une sous-variété fermée), l'espace quotient $\Gamma/\mathscr{G}$ constitue une variété différentiable (de dimension $\dim \Gamma - \dim \mathscr{G}$).

Exemple 3. Soit C_2 un groupe cyclique d'ordre 2 engendré par t. La formule

$$t\,(\mathrm{x}) = -\mathrm{x}, \quad \mathrm{x} \in S^n,$$

définit une action libre de C_2 sur la sphère $S^n = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{n+1};\ |\,\mathrm{x}\,| = 1\}$. Le sous-espace $(S^n)^*$ est formé des points $(\mathrm{x}, \varepsilon\mathrm{x})$, $\varepsilon = \pm 1$, et la translation est donnée par $\tau\,(\mathrm{x}, \varepsilon\mathrm{x}) = t^a$, où $a = 0$ si $\varepsilon = 1$, et $a = 1$ si $\varepsilon = -1$. Cette application est évidemment continue, si bien que *la sphère S^n est un C_2-espace principal.* Le C_2-fibré principal correspondant a pour base l'espace projectif de dimension n

$$\mathbb{R}P^n = S^n/C_2.$$

On note que l'espace total et l'espace de base du fibré principal sont ici des variétés différentiables et que le groupe structural est un groupe de Lie.

* * *

Si le groupe $\mathcal{G}$ opère continûment à droite sur l'espace $\mathcal{E}$ et à gauche sur l'espace $\mathcal{F}$, la formule

$$(\mathrm{p}, x)\,a = (\mathrm{p}a, a^{-1}x), \quad \mathrm{p} \in \mathcal{E}, \quad x \in \mathcal{F}, \quad a \in \mathcal{G},$$

définit sur $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ l'action à droite (qui est, on l'établit facilement, continue) du groupe $\mathcal{G}$.

L'espace quotient correspondant des orbites $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})/\mathcal{G}$ se note $\mathcal{E} \underset{\mathcal{G}}{\times} \mathcal{F}$ et s'appelle *produit* de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ *sur* $\mathcal{G}$.

Désireux d'alléger les formules, nous noterons de règle $[\mathrm{p}, x]$ (ou $[\mathrm{p}, x]_{\mathcal{G}}$) l'orbite $(\mathrm{p}, x)\,\mathcal{G}$ du point $(\mathrm{p}, x) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$. On note que par définition

$$[\mathrm{p}a, x] = [\mathrm{p}, ax]$$

pour tout élément a de $\mathcal{G}$.

Soit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{E} \underset{\mathcal{G}}{\times} \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}/\mathcal{G} = \mathcal{B} \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont des applications par passage au quotient et la flèche verticale gauche est la projection du produit direct $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ sur le premier facteur. Quant à la flèche verticale droite, on la définit univoquement en exigeant que le diagramme soit commutatif. (En effet, si $[\mathrm{p}, x] = [\mathrm{q}, y]$ dans $\mathcal{E} \underset{\mathcal{G}}{\times} \mathcal{F}$, i.e. $\mathrm{q} = \mathrm{p}a$, $x = ay$, alors $\mathrm{p}\mathcal{G} = \mathrm{q}\mathcal{G}$, i.e. $\pi\,(\mathrm{p}) = \pi\,(\mathrm{q})$ dans $\mathcal{E}/\mathcal{G}$. Aussi, la formule $\pi\,[\mathrm{p}, x] = \mathrm{p}\mathcal{G}$ définit entièrement l'application

$$\pi : \mathcal{E} \underset{\mathcal{G}}{\times} \mathcal{F} \to \mathcal{B}$$

qui termine le diagramme.) L'épimorphie de $\mathscr{E} \times \mathscr{F} \to \mathscr{E} \underset{\mathscr{G}}{\times} \mathscr{F}$ entraîne de suite la *continuité de* π. Il y a plus. *L'application* π *est ouverte* si $\mathscr{E} \times \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ et $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$ le sont. Aussi, π étant une surjection est *épimorphe* (i.e. la topologie dans $\mathscr{B}$ est encore la topologie quotient pour π).

Ainsi, le triplet

(11) $$\xi = (\mathscr{E}', \pi, \mathscr{B}), \quad \mathscr{E}' = \mathscr{E} \underset{\mathscr{G}}{\times} \mathscr{F},$$

constitue un fibré dont la projection π est une surjection ouverte. Soit $\mathscr{F}_b = \pi^{-1}(b)$ la fibre de (11) au-dessus de $b \in \mathscr{B}$, et soit $\mathbf{p}_0$ un point de l'espace $\mathscr{E}$ tel que $\mathbf{p}_0\mathscr{G} = b$. La formule

(12) $$j(x) = [\mathbf{p}_0, x]_{\mathscr{G}}, \quad x \in \mathscr{F},$$

définit une application continue $j: \mathscr{F} \to \mathscr{F}_b$ (dont on signale la dépendance vis-à-vis du choix de p_0).

Si $[\mathbf{p}, x] \in \mathscr{F}_b$, i.e. $\mathbf{p}\mathscr{G} = b$, alors $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 a$ pour un élément a de $\mathscr{G}$, si bien que $[\mathbf{p}, x] = [\mathbf{p}_0, ax] = j(ax)$. Par conséquent, *$j$ est une surjection.*

Poursuivons. On voit sans peine que *si le groupe $\mathscr{G}$ opère librement sur l'espace $\mathscr{E}$, alors j est une bijection.* En effet, si $j(x) = j(y)$, i.e. $[\mathbf{p}_0, x] = [\mathbf{p}_0, y]$, alors $\mathbf{p}_0 a = \mathbf{p}_0$ et $x = ay$ pour un certain élément $a \in \mathscr{G}$. Mais, comme l'action est libre, l'égalité $\mathbf{p}_0 a = \mathbf{p}_0$ implique $a = e$, auquel cas $x = ay$ entraîne $x = y$. □

L'application réciproque $j^{-1}: \mathscr{F}_b \to \mathscr{F}$ envoie chaque point $[\mathbf{p}, x] \in \mathscr{F}_b$ en le point $ax \in \mathscr{F}$, avec a un élément de $\mathscr{G}$ tel que $\mathbf{p}_0 a = \mathbf{p}$. D'autre part, si $\mathscr{G}$ opère librement, l'égalité $\mathbf{p}_0 a = \mathbf{p}$ signifie que $a = \tau(\mathbf{p}_0, \mathbf{p})$, τ étant la translation (9). Donc,

$$j^{-1}([\mathbf{p}, x]) = \tau(\mathbf{p}_0, \mathbf{p})\, x.$$

Si l'application τ est continue, i.e. si $\mathscr{G}$ opère principalement sur $\mathscr{E}$, l'application j^{-1} est donc continue, si bien que *j est un homéomorphisme.* Ainsi, le fibré (11) possède dans ce cas une fibre-type, espace $\mathscr{F}$.

Définition 3. Le fibré (11) obtenu à partir du fibré principal $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ et du $\mathscr{G}$-espace à gauche $\mathscr{F}$ (ainsi que tout fibré qui lui est $\mathscr{B}$-isomorphe) s'appelle *fibré de groupe structural $\mathscr{G}$ et de fibre $\mathscr{F}$, associé au fibré principal ξ.*

On le désigne par le symbole $\xi[\mathscr{F}]$.

On souligne que les fibrés à groupe structural sont nécessairement déterminés en fonction des fibrés principaux.

Nous appellerons *$\mathscr{G}$-fibrés* les fibrés à groupe structural $\mathscr{G}$. (Certains auteurs donnent ce nom aux fibrés de la forme (8) que, pour notre part, nous ne nommons pas.)

Remarque 3. Chose à remarquer, le groupe $\mathscr{G}$ n'opère pas en général sur les fibres $\mathscr{F}_b$ de $\xi[\mathscr{F}]$.

Problème 7. Montrer que si $\mathcal{G}$ est un groupe abélien, on définit naturellement sur les fibres $\mathcal{F}_b$ de $\xi[\mathcal{F}]$ une action du groupe $\mathcal{G}$ pour laquelle tous les homéomorphismes (12) sont équivariants.

Soient $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{B}')$ et $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ deux fibrés principaux de même groupe structural $\mathcal{G}$. La formule

$$\varphi[\mathcal{F}]([p, x]) = [\varphi(p), x], \quad p \in \mathcal{E}', \quad x \in \mathcal{F},$$

définit bien, pour tout $\mathcal{G}$-espace à gauche $\mathcal{F}$ et toute application équivariante $\varphi : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$, une application fibre à fibre

$$\varphi[\mathcal{F}] : \xi'[\mathcal{F}] \to \xi[\mathcal{F}].$$

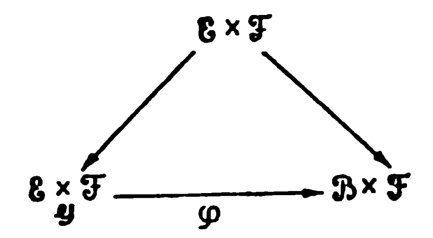
Si φ est un homéomorphisme, il en est de même de $\varphi[\mathcal{F}]$. Nous dirons des homéomorphismes fibre à fibre $\varphi[\mathcal{F}]$ qu'ils sont des *$\mathcal{G}$-isomorphismes* de fibrés à groupe structural $\mathcal{G}$. Ainsi, *deux fibrés $\xi'[\mathcal{F}']$ et $\xi[\mathcal{F}]$ de groupe structural $\mathcal{G}$ sont $\mathcal{G}$-isomorphes si et seulement si $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ et s'il y a $\mathcal{G}$-isomorphisme des fibrés principaux ξ' et ξ.* Les fibrés $\xi'[\mathcal{F}]$ et $\xi[\mathcal{F}]$ peuvent certes être isomorphes sans être $\mathcal{G}$-isomorphes.

Exemples de fibrés à groupe structural.

Exemple 4. On suppose que le groupe $\mathcal{G}$ *opère trivialement* sur $\mathcal{F}$, i.e. $ax = x$ pour tout $a \in \mathcal{G}$ et tout point $x \in \mathcal{F}$. Alors $(p, x) \sim (q, y)$ dans $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ si et seulement si $x = y$ et $p \sim q$ dans $\mathcal{E}$. Aussi l'application

$$\mathcal{E} \times \mathcal{F} \xrightarrow{\pi \times \mathrm{id}} \mathcal{B} \times \mathcal{F}, \quad (p, x) \mapsto (p\mathcal{G}, x),$$

induit $\varphi : \mathcal{E} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F} \to \mathcal{B} \times \mathcal{F}$, ligne inférieure du diagramme commutatif



Puisque les deux autres applications du diagramme sont continues et ouvertes, φ est continue et ouverte, et, ce qui plus est, elle est évidemment bijective. Par conséquent, c'est un homéomorphisme. D'autre part, si $\mathrm{pr} : \mathcal{B} \times \mathcal{F} \to \mathcal{B}$, $(b, x) \mapsto b$, est la projection de $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ sur le premier facteur, on a pour tout point $[p, x] \in \mathcal{E} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}$:

$$(\mathrm{pr} \circ \varphi)[p, x] = p\mathcal{G} = \pi([p, x]),$$

égalité qui signifie que φ est un homéomorphisme fibre à fibre sur $\mathcal{B}$ du fibré $\xi[\mathcal{F}] = (\mathcal{E} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}, \pi, \mathcal{B})$ sur le fibré $(\mathcal{B} \times \mathcal{F}, \mathrm{pr}, \mathcal{B})$.

Le fibré $(\mathcal{B} \times \mathcal{F}, \mathrm{pr}, \mathcal{B})$ (ainsi que tout fibré sur $\mathcal{B}$ qui lui est isomorphe) est dit *trivial.*

Ainsi, *si le groupe* $\mathcal{G}$ *opère trivialement sur l'espace* $\mathcal{F}$, *le fibré* $\xi[\mathcal{F}]$ *est trivial pour tout fibré principal* ξ (et il ne dépend donc pas de ξ, voire de $\mathcal{G}$).

Exemple 5. Soit ξ un fibré principal trivial, i.e. il s'écrit $\xi = (\mathcal{B} \times \mathcal{G}, \pi, \mathcal{B})$ (voir exemple 1). La formule :

$$\varphi\,[\mathrm{p}, x]_{\mathcal{G}} = (b, ax), \quad \text{où } \mathrm{p} = (b, a), \quad b \in \mathcal{B}, \quad a \in \mathcal{G},$$

définit bien (le vérifier !) une application continue fibre à fibre

$$\mathcal{E} \underset{\mathcal{G}}{\times} \mathcal{F} \to \mathcal{B} \times \mathcal{F}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{B} \times \mathcal{G},$$

qui est un homéomorphisme (admettant l'inverse $(b, x) \mapsto [(b, e), x]$, avec e l'unité de $\mathcal{G}$). Ainsi, *le fibré* $\xi[\mathcal{F}]$ *est trivial quels que soient le* $\mathcal{G}$*-fibré principal trivial* ξ *et le* $\mathcal{G}$*-espace à gauche* $\mathcal{F}$.

Les fibrés $\xi[\mathcal{F}]$ associés au fibré principal trivial ξ s'appellent $\mathcal{G}$*-fibrés triviaux*. (De ce point de vue, $\xi[\mathcal{F}]$ de l'exemple 4, qui est un fibré trivial et un $\mathcal{G}$-fibré à la fois, n'est pas en général un $\mathcal{G}$-fibré trivial.)

Exemple 6. Chaque élément a d'un groupe $\mathcal{G}$ arbitraire détermine l'application $L_a \colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ définie par

$$L_a b = ab, \quad b \in \mathcal{G};$$

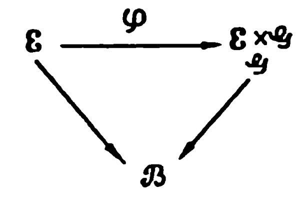
c'est la *translation à gauche* de a. La correspondance $a \mapsto L_a$ donne l'action à gauche de $\mathcal{G}$ sur l'ensemble de ses points, qui est continue pour $\mathcal{G}$ topologique. (Cette action est libre, mais nous n'en avons pas besoin pour le moment.) Aussi, on définit, pour tout $\mathcal{G}$-fibré principal $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, le fibré $\xi[\mathcal{G}]$. L'espace total de $\xi[\mathcal{G}]$ est par définition l'espace quotient $\mathcal{E} \underset{\mathcal{G}}{\times} \mathcal{G}$ du produit $\mathcal{E} \times \mathcal{G}$ par l'action

$$(\mathrm{p}, a)\, g = (\mathrm{p}g, g^{-1}a), \quad \mathrm{p} \in \mathcal{E}, \quad a, g \in \mathcal{G},$$

i.e. par la relation d'équivalence telle que $(\mathrm{p}, a) \sim (\mathrm{q}, b)$, $\mathrm{p}, \mathrm{q} \in \mathcal{E}$, $a, b \in \mathcal{G}$, si et seulement si l'on trouve un élément $g \in \mathcal{G}$ pour lequel $\mathrm{q} = \mathrm{p}g$ et $a = gb$. Aussi, la formule $(\mathrm{p}, a) \mapsto \mathrm{p}a$ définit entièrement l'application (évidemment continue) $\mathcal{E} \underset{\mathcal{G}}{\times} \mathcal{G} \to \mathcal{E}$, inverse de l'application continue

$$\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \underset{\mathcal{G}}{\times} \mathcal{G}, \quad \mathrm{p} \mapsto [\mathrm{p}, e]_{\mathcal{G}}.$$

Comme φ s'effectue fibre à fibre (le diagramme



est commutatif), cela prouve que $\xi[\mathcal{G}]$ *est isomorphe à* ξ.

Exemple 7. Soit $\xi = (S^1, \pi, \mathbb{R}P^1)$ le C_2-fibré principal de l'exemple 3 (pour $n = 1$), et soit I le segment $[-1, 1]$ sur lequel C_2 opère par la formule $t(x) = -x$ (avec t le générateur de C_2, et $x \in$ $\in [-1, 1]$). L'espace total

$$S^1 \underset{C_2}{\times} I$$

du fibré associé $\xi[I]$ est la bande de Möbius (le démontrer !).

* * *

Définition 4. Soit $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un fibré quelconque. Une application continue $s: \mathscr{B} \to \mathscr{E}$ s'appelle *section* de ξ si

$$\pi \circ s = \mathrm{id},$$

i.e. si $s(b) \in \mathscr{F}_b$ pour tout point $b \in \mathscr{B}$. (Ainsi, on dit de façon plus concrète que la section $s: \mathscr{B} \to \mathscr{E}$ choisit dans chaque fibre $\mathscr{F}_b$ le point $s(b)$.)

Exemples de sections.

Exemple 8. Chaque section s d'un fibré trivial $(\mathscr{B} \times \mathscr{F}, \mathrm{pr}, \mathscr{B})$ est donnée par la formule

(13) $$s(b) = (b, f(b)), \quad b \in \mathscr{B},$$

avec $f: \mathscr{B} \to \mathscr{F}$ une application continue. Réciproquement, toute application continue $f: \mathscr{B} \to \mathscr{F}$ définit par (13) une section $s: \mathscr{B} \to$ $\to \mathscr{B} \times \mathscr{F}$ du fibré $(\mathscr{B} \times \mathscr{F}, \mathrm{pr}, \mathscr{B})$. On voit donc que *les sections du fibré trivial* $(\mathscr{B} \times \mathscr{F}, \mathrm{pr}, \mathscr{B})$ *sont en correspondance biunivoque canonique avec les applications continues* $\mathscr{B} \to \mathscr{F}$.

Ainsi, on interprète les sections comme applications continues généralisées.

Exemple 9 (qui généralise l'exemple 8). Soient $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un fibré de fibre-type $\mathscr{F}$, et $\xi = (\mathfrak{E}, \pi, \mathscr{B})$ le $\mathscr{G}$-fibré principal associé. (Ainsi $\xi = \xi[\mathscr{F}]$; en particulier, $\mathscr{E} = \mathfrak{E} \underset{\mathscr{G}}{\times} \mathscr{F}$.) Soit ensuite $s: \mathscr{B} \to \mathscr{E}$ une section quelconque de ξ. Le point $(s \circ \pi)(p)$ s'écrit de façon unique pour chaque $p \in \mathfrak{E}$ comme $[p, f(p)]_{\mathscr{G}}$, avec $f(p) \in \mathscr{F}$. Cela donne une *application* $f: \mathfrak{E} \to \mathscr{F}$ *qui est continue.*

[On dirait de prime abord que c'est l'évidence même du moment que f est univoquement définie par l'existence du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{E} & \xrightarrow{\mathrm{id}\times f} & \mathfrak{E} \times \mathscr{F} \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ \mathscr{B} & \xrightarrow{s} & \mathfrak{E} \underset{\mathscr{G}}{\times} \mathscr{F} = \mathscr{E} \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des applications épimorphes (voire ouvertes). Cependant, ce diagramme ne nous aide guère. En effet,

l'image réciproque d'un point $(\mathrm{p}_0, x_0) \in \mathscr{E} \times \mathscr{F}$ quelconque (si elle n'est pas vide, i.e. si $x_0 = f(\mathrm{p}_0)$) par la composée des applications du diagramme, sauf la ligne supérieure, est formée de tous les points de l'orbite $\mathrm{p}_0\mathscr{G}$, tandis que celle de (p_0, x_0) par l'application $\mathrm{id} \times f$ se réduit à p_0. Aussi, on démontre la continuité de f par un procédé plus subtile.]

Soit $\mathrm{p}_0 \in \mathscr{E}$ et $x_0 = f(\mathrm{p}_0)$. Soit ensuite U un voisinage quelconque de x_0 dans l'espace $\mathscr{F}$. On demande un voisinage V de p_0 dans $\mathscr{E}$ tel que $fV \subset U$. On remarque à cet effet que, puisque le groupe $\mathscr{G}$ opère continûment sur $\mathscr{F}$, on trouve dans $\mathscr{G}$ un voisinage O de l'unité et dans $\mathscr{F}$ un voisinage U' de x_0 pour lesquels $OU' \subset U$ (i.e. $ax \in U$ pour tout élément $a \in O$ et tout point $x \in U'$). Pareillement, comme la translation (9) et la section s sont continues, l'espace $\mathscr{E}$ contient un voisinage V' de p_0 tel que $\tau((V' \times V') \cap \mathscr{E}^*) \subset O$, et l'espace $\mathscr{B}$ contient un voisinage W de $b_0 = \pi(\mathrm{p}_0)$ tel que $s(W) \subset \pi(V' \times U')$ (l'ensemble $\pi(V' \times U')$ est ouvert dans $\mathscr{E}' = \mathscr{E} \times_{\mathscr{G}} \mathscr{F}$ parce que l'application π est ouverte). On pose $V = \pi^{-1}W \cap V'$.

Si $\mathrm{p} \in V$, alors $\pi(\mathrm{p}) \in W$ et $(s \circ \pi)(\mathrm{p}) \in \pi(V' \times U')$, i.e. $(s \circ \pi)(\mathrm{p}) = [\mathrm{q}, x]$, où $\mathrm{q} \in V'$ et $x \in U'$. D'autre part, $(s \circ \pi)(\mathrm{p}) = [\mathrm{p}, f(\mathrm{p})]$ par définition. Aussi, le groupe $\mathscr{G}$ possède un élément $a = \tau(\mathrm{q}, \mathrm{p})$ tel que $\mathrm{p} = \mathrm{q}a$ et $f(\mathrm{p}) = ax$. Or, $\mathrm{q} \in V'$, et $\mathrm{p} \in V'$, si bien que $a = \tau(\mathrm{q}, \mathrm{p}) \in O$, donc $f(\mathrm{p}) \in OU' \subset U$ vu que $x \in U'$. Par conséquent, $fV \subset U$. □

Tout point $\mathrm{p} \in \mathscr{E}$ et tout $a \in \mathscr{G}$ vérifient par définition l'égalité $(s \circ \pi)(\mathrm{p}a) = [\mathrm{p}a, f(\mathrm{p}a)] = [\mathrm{p}, af(\mathrm{p}a)]$. D'autre part, $(s \circ \pi)(\mathrm{p}a) = (s \circ \pi)(\mathrm{p}) = [\mathrm{p}, f(\mathrm{p})]$. Ainsi,

$$f(\mathrm{p}a) = a^{-1}f(\mathrm{p}), \quad \mathrm{p} \in \mathscr{E}, \quad a \in \mathscr{G}. \tag{14}$$

Inversement, soit f une application continue $\mathscr{E} \to \mathscr{F}$ quelconque assujettie à (14) et soit $\pi(\mathrm{p}) = \pi(\mathrm{q})$, i.e. $\mathrm{q} = \mathrm{p}a$. On a

$$[\mathrm{q}, f(\mathrm{q})] = [\mathrm{p}a, a^{-1}f(\mathrm{p})] = [\mathrm{p}, f(\mathrm{p})].$$

La formule

$$s(b) = [\mathrm{p}, f(\mathrm{p})]_{\xi}, \quad b = \pi(\mathrm{p}),$$

définit donc complètement une section s du fibré $\xi = \xi[\mathscr{F}]$.

Ainsi, *les sections du fibré ξ sont en correspondance biunivoque canonique avec les applications continues $f: \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ soumises à la relation* (14). □

Remarque 4. Le $\mathscr{G}$-espace à gauche $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{G}$-espace à droite pour l'action $a \mapsto R_a$ définie par

$$R_a x = a^{-1}x, \quad x \in \mathscr{F}.$$

La condition (14) signifie que *f est équivariante pour cette action.*

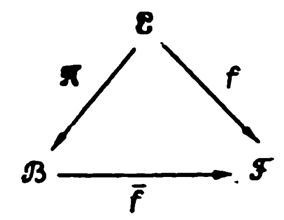
Si $\mathscr{G}$ opère trivialement sur $\mathscr{F}$ (si bien que $\xi = \xi[\mathscr{F}]$ est un fibré trivial), la condition (14) s'écrit

$$(15) \qquad f(\mathrm{p}a) = f(\mathrm{p}), \quad \mathrm{p} \in \mathfrak{E}, \quad a \in \mathscr{G},$$

et la formule

$$(16) \qquad \bar{f}(b) = f(\mathrm{p}) \text{ si } b = \pi(\mathrm{p}) \quad (\text{i.e. } b = \mathrm{p}\mathscr{G})$$

définit donc bien l'application $\bar{f}: \mathscr{B} \to \mathscr{F}$, ligne inférieure du diagramme



Comme la projection π est un épimorphisme, $\bar{f}$ est continue si et seulement s'il en est de même de f.

La formule (16) établit donc une correspondance biunivoque entre les applications continues $\mathfrak{E} \to \mathscr{F}$ soumises à (15) et les applications continues arbitraires $\mathscr{B} \to \mathscr{F}$.

D'autre part, l'isomorphisme fibre à fibre $\mathfrak{E} \underset{\mathscr{G}}{\times} \mathscr{F} \to \mathscr{B} \times \mathscr{F}$ du cas considéré est établi par la correspondance $[\mathrm{p}, x] \mapsto (\pi(\mathrm{p}), x)$ (voir exemple 4). Par conséquent, il transforme la section s de $\xi = \xi[\mathscr{F}]$ associée à l'application f en la section $b \mapsto (b, \bar{f}(b))$ associée à $\bar{f}$ du fibré trivial $(\mathscr{B} \times \mathscr{F}, \mathrm{pr}, \mathscr{B})$.

Ainsi, l'exemple 9 généralise bien l'exemple 8.

Exemple 10. Supposons que le groupe $\mathscr{G}$ opère sur l'espace $\mathscr{F}$ et qu'il existe un *point fixe* par cette action (i.e. un point x_0 tel que $ax_0 = x_0$ pour tout $a \in \mathscr{G}$). L'égalité $f(\mathrm{p}) = x_0$, $\mathrm{p} \in \mathfrak{E}$, détermine l'application $f: \mathfrak{E} \to \mathscr{F}$ qui vérifie (14). La section correspondante est donnée par

$$s(b) = [\mathrm{p}, x_0], \quad b = \pi(\mathrm{p})$$

(cette formule définit entièrement s parce que $[\mathrm{p}a, x_0] = [\mathrm{p}, x_0]$ pour tout $a \in \mathscr{G}$). Ainsi, *chaque point fixe du $\mathscr{G}$-espace $\mathscr{F}$ définit une section du fibré $\xi = \xi[\mathscr{F}]$.*

La réciproque n'est pas vraie en général.

Exemple 11. Soit $\xi = (\mathscr{B} \times \mathscr{G}, \pi, \mathscr{B})$ un fibré principal trivial. La formule

$$s(b) = (b, e), \quad b \in \mathscr{B},$$

avec e l'unité du groupe $\mathscr{G}$, en définit une section s. Mais ξ est de plus (voir exemple 5) un fibré $\xi[\mathscr{F}]$ de fibre $\mathscr{F}$ le groupe $\mathscr{G}$ considéré

comme $\mathcal{G}$-espace pour les translations à gauche, donc dépourvu de points fixes.

Chose à noter, c'est la seule exception dans la classe des fibrés principaux. En effet, si un $\mathcal{G}$-fibré principal arbitraire $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ admet une section $s: \mathcal{B} \to \mathcal{E}$, la formule

$$\varphi(b, a) = s(b)\, a, \quad b \in \mathcal{B}, \quad a \in \mathcal{G},$$

définit l'application (évidemment continue)

$$\varphi: \mathcal{B} \times \mathcal{G} \to \mathcal{E}.$$

Comme $s(b)(ag) = (s(b)\,a)\,g$, $g \in \mathcal{G}$, elle est équivariante. D'autre part,

$$\psi(\mathrm{p}) = (\pi(\mathrm{p}), \tau((s \circ \pi)\,\mathrm{p}, \mathrm{p})), \quad \mathrm{p} \in \mathcal{E},$$

donne l'application continue $\psi: \mathcal{E} \to \mathcal{B} \times \mathcal{G}$ telle que $(\varphi \circ \psi)(\mathrm{p}) = (s \circ \pi)(\mathrm{p})\,\tau((s \circ \pi)\,\mathrm{p}, \mathrm{p}) = \mathrm{p}$ et $(\psi \circ \varphi)(b, a) = (\pi(s(b)\,a), \tau((s \circ \pi)(s(b)\,a), s(b)\,a)) = (b, a)$, i.e. $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Par conséquent, φ est un homéomorphisme équivariant (isomorphisme de $\mathcal{G}$-fibrés principaux). Ainsi, *un $\mathcal{G}$-fibré principal admet une section si et seulement s'il est trivial.*

En vertu des exemples 9 et 10 (et de $\xi = \xi[\mathcal{G}]$), il en découle de suite qu'*un $\mathcal{G}$-fibré principal $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ est trivial si et seulement s'il existe une application continue $f: \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ qui vérifie la relation* (14).

* * *

Soit, une fois de plus, $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ un fibré quelconque. On pose $\mathcal{E}_U = \pi^{-1}U$ et $\pi_U = \pi|_{\mathcal{E}_U}$ pour tout ensemble $U \subset \mathcal{B}$. Le triplet $(\mathcal{E}_U, \pi_U, U)$ s'appelle *partie de* ξ au-dessus de U et se note $\xi|_U$.

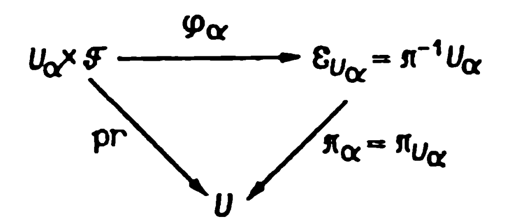
S'agissant d'un fibré principal $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, le sous-espace $\mathcal{E}_U = \pi^{-1}U$ est un $\mathcal{G}$-espace (si $\mathrm{p} \in \mathcal{E}_U$, alors $\mathrm{p}a \in \mathcal{E}_U$ pour tout $a \in \mathcal{G}$) et même un $\mathcal{G}$-espace principal (on le constate aisément). Cela veut dire que *chaque fibré $\xi|_U$, avec ξ un fibré principal, est principal lui aussi*, et il est clair que tout $\mathcal{G}$-espace à gauche $\mathcal{F}$ vérifie l'égalité ($\mathcal{G}$-isomorphisme canonique)

$$\xi[\mathcal{F}]|_U = \xi|_U[\mathcal{F}].$$

Ainsi, *une partie au-dessus de U d'un $\mathcal{G}$-fibré quelconque est encore un $\mathcal{G}$-fibré.*

Définition 5. Un fibré ξ de fibre-type $\mathcal{F}$ est dit *localement trivial* s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de l'espace de base $\mathcal{B}$ tel que ξ (plus précisément, $\xi|_{U_\alpha}$) soit trivial au-dessus de chaque élé-

ment U_α de $\{U_\alpha\}$. Cela signifie qu'on a pour $\xi\,|_{U_\alpha}$ le diagramme commutatif



dont la ligne supérieure φ_α est un homéomorphisme.

On dit de φ_α que c'est une ***trivialisation*** de ξ au-dessus de U_α, et U_α s'appelle ***voisinage trivialisant.***

Si ξ est un $\mathcal{G}$-fibré, on exige de plus que les trivialisations φ_α soient des $\mathcal{G}$-isomorphismes.

On voit facilement (le démontrer !) que les $\mathcal{G}$-fibrés associés à un $\mathcal{G}$-fibré principal localement trivial sont localement triviaux même sous ces hypothèses.

Dans la suite, tous les fibrés seront en fait supposés localement triviaux.

Un rôle particulier revient en géométrie différentielle aux fibrés localement triviaux de fibre-type $\mathbb{R}^n$ et de groupe structural GL (n; $\mathbb{R}$) (qui agit naturellement sur $\mathbb{R}^n$). Il se trouve que ces fibrés (dits *vectoriels*) sont susceptibles d'une définition directe qui ne recourt pas au fibré principal correspondant.

On les étudiera dans la leçon 6.

LEÇON 2

Revêtements. — Exemples de revêtements. — Quelques remarques sur les revêtements. — Théorème du chemin de revêtement. — Une précision de ce théorème. — Fibrations au sens de Hurewicz.

Soit

(1) $$\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$$

une application continue. On dit qu'un ensemble ouvert $U \subset \mathscr{B}$ est *bien recouvert* par l'application π si son image réciproque $\mathscr{E}_U = \pi^{-1}U$, quand elle n'est pas vide, est la réunion disjointe d'ensembles ouverts $V_\nu \subset \mathscr{E}$:

$$\pi^{-1}U = \coprod_\nu V_\nu$$

tels que

(2) $$\pi|_{V_\nu}: V_\nu \to U$$

soit un homéomorphisme pour tout ν.

On suppose l'espace $\mathscr{B}$ connexe (voir III.11).

Définition 1. L'application (1) s'appelle *revêtement* si

a) l'espace $\mathscr{E}$ est connexe:

b) il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ de l'espace $\mathscr{B}$, qui est formé des ensembles bien recouverts par (1).

On donne également le nom de *revêtement* au triplet $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ étant des espaces et π un revêtement $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$.

Remarque 1. On a évidemment la condition b) si ξ est un fibré localement trivial de fibre $\mathscr{F}$ discrète. Soient, inversement, ξ un revêtement, b_0 un point quelconque de $\mathscr{B}$, et soit $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{b_0}$ la fibre de ξ au-dessus de b_0. Considérons l'ensemble $C \subset \mathscr{B}$ de tous les points $b \in \mathscr{B}$ tels que la fibre $\mathscr{F}_b = \pi^{-1}(b)$ soit équipotente à l'ensemble $\mathscr{F}$. Si U_α est un élément de $\mathfrak{U}$ tel que $C \cap U_\alpha \neq \varnothing$, on a manifestement $U_\alpha \subset C$. Aussi, C est ouvert et fermé à la fois (si $b \in \overline{C}$ et $b \in U_\alpha$, alors $C \cap U_\alpha \neq \varnothing$, donc $U_\alpha \subset C$). Puisque $C \neq \varnothing$ (car $b_0 \in C$) et $\mathscr{B}$ est connexe, la chose n'est possible que quand $C = \mathscr{B}$, si bien que toutes les fibres de (1) sont équipotentes à $\mathscr{F}$ qui est donc la fibre-type de π. Cela signifie que l'ensemble $\mathscr{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$ est pour tout α homéomorphe fibre à fibre au produit $U_\alpha \times \mathscr{F}$, i.e. ξ constitue un fibré localement trivial de fibre $\mathscr{F}$. Ainsi, *les revêtements*

sont exactement les fibrés localement triviaux de fibres discrètes et d'espace total connexe sur un espace connexe.

En particulier, *tout revêtement* (1) *est une surjection.*

L'espace total $\mathscr{E}$ de ξ s'appelle également *espace de revêtement.*

Si un revêtement a toutes ses fibres finies (qui ont donc un même nombre de points), on dit qu'il est *à un nombre fini de feuillets*, et le *nombre de feuillets* est celui des points des fibres (on observe qu'on ne définit pas le *feuillet d'un revêtement*).

* * *

Exemples de revêtements.

Exemple 1. La formule

$$\pi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \quad t \in \mathbb{R},$$

définit le revêtement $\mathbb{R} \to S^1$ qui recouvre la circonférence $S^1 = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$ par la droite $\mathbb{R}$.

En coordonnée complexe $z = x + iy$,

$$\pi(t) = e^{2\pi i t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Géométriquement, la droite s'enroule sur la circonférence. Les fibres de π sont les sous-espaces discrets $\{t_0 + 2\pi N, N = 0, \pm 1, \ldots\}$ (classes du groupe $\mathbb{R}$ suivant le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$), et tout arc ouvert de S^1 (même s'il a ses extrémités confondues) est bien recouvert par l'application $\mathbb{R} \to S^1$.

Toute fonction $S^1 \to \mathbb{R}$ sur S^1 composée avec π s'interprète comme fonction périodique sur $\mathbb{R}$. (Ce passage de S^1 à $\mathbb{R}$ équivaut à définir sur S^1 la coordonnée angulaire; voir III. 20, p. 295.)

Exemple 2. La formule

$$\pi(t_1, t_2) = (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

donne le revêtement

$$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2,$$

où $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ est un tore de dimension 2. Les fibres de π sont les classes du groupe $\mathbb{R}^2$ suivant le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$. La restriction de π au carré $I^2 = \{(t_1, t_2); 0 \leqslant t_1 \leqslant 1, 0 \leqslant t_2 \leqslant 1\}$ permet de représenter $\mathbb{T}^2$ par le carré I^2 à côtés opposés identifiés.

On conçoit que cet exemple se généralise de suite à tout n.

Il autorise de plus à dire que *quels que soient les revêtements* $\pi_1 : \mathscr{E}_1 \to \mathscr{B}_1$ *et* $\pi_2 : \mathscr{E}_2 \to \mathscr{B}_2$, *l'application*

$$\pi_1 \times \pi_2 : \mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2 \to \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2, \quad (p_1, p_2) \mapsto (\pi_1(p_1), \pi_2(p_2)),$$

est encore un revêtement.

Problème 1. Démontrer la dernière affirmation. (Ne pas oublier de montrer que l'espace $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ est connexe si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ le sont.)

Les exemples 1 et 2 admettent une autre généralisation.

Exemple 3. Un sous-groupe Γ d'un groupe topologique $\mathcal{G}$ est dit *discret* si l'unité e de $\mathcal{G}$ possède un voisinage U tel que $U_a \cap U_b = \varnothing$ quels que soient a, b distincts de Γ. (Ce sous-groupe est un sous-espace discret de $\mathcal{G}$. Question: La réciproque est-elle vraie ?) On voit sans peine (le démontrer !) que *quel que soit le sous-groupe discret Γ d'un groupe topologique connexe $\mathcal{G}$, la projection canonique*

$$\pi: \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\Gamma, \quad g \mapsto g\Gamma, \quad g \in \mathcal{G},$$

est un revêtement.

Ce revêtement est à n feuillets, n fini, si et seulement si le groupe Γ est fini, auquel cas n est égal à l'ordre de Γ.

Exemple 4. Le groupe S^1 contient pour tout $n \geqslant 1$ un groupe fini (donc discret) Γ formé des points $e^{2\pi ik/n}$, $k = 1, \ldots, n$. L'application

$$S^1/\Gamma \to S^1, \quad e^{it}\Gamma \mapsto e^{int},$$

est, on le constate facilement, un homéomorphisme, si bien que sa composée avec la projection canonique $S^1 \to S^1/\Gamma$ donne le revêtement

$$\pi: S^1 \to S^1 \tag{3}$$

à un nombre fini ($= n$) de feuillets.

Géométriquement, la circonférence S^1 s'enroule n fois sur elle-même.

Problème 2 (qui généralise l'exemple 4). Démontrer que

1° quels que soient les vecteurs linéairement indépendants (m_1, m_2), (n_1, n_2) à valeurs entières, tous les points

$$(e^{2\pi i (m_1k+m_2l)/\Delta}, e^{2\pi i (n_1k+n_2l)/\Delta}), \quad \Delta = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix},$$

$k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, du tore T^2 constituent un sous-groupe fini d'ordre $|\Delta|$;

2° l'espace quotient correspondant T^2/Γ est homéomorphe à T^2.

On obtient donc le revêtement à $|\Delta|$ feuillets

$$\pi: T^2 \to T^2 \tag{4}$$

d'un tore par un tore. Si $(m_1, m_2) = (1, 0)$ et $(n_1, n_2) = (0, n)$, il s'écrit

$$\pi' \times \mathrm{id}: T^2 \to T^2, \tag{5}$$

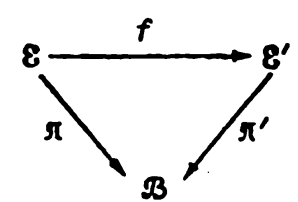
avec $\pi': S^1 \to S^1$ le revêtement (3), et si $(m_1, m_2) = (m, 0)$, $(n_1, n_2) = (0, 1)$, il vient

$$\mathrm{id} \times \pi': T^2 \to T^2, \tag{6}$$

$\pi': S^1 \to S^1$ étant le revêtement (3) pour m.

Soient $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ et $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{B})$ deux revêtements de l'espace $\mathcal{B}$.

Conformément aux définitions générales de la leçon 1, l'homéomorphisme $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un *isomorphisme* de ξ sur ξ' s'il transforme les fibres dans les fibres, i.e. si le diagramme



est commutatif.

Problème 3. Démontrer que tout revêtement (4) est isomorphe au produit de composition d'un revêtement (5) et d'un revêtement (6).

Exemple 5 (qui généralise l'exemple 3). On suppose que le groupe discret Γ opère continûment à gauche (voir leçon 1) sur l'espace topologique $\mathcal{E}$. Cette action est dite *discrète* si chaque point $p \in \mathcal{E}$ possède un voisinage V tel que

$$\gamma V \cap V = \varnothing \quad \text{pour tout élément } \gamma \neq e \text{ de } \Gamma,$$

avec γV une partie de l'espace $\mathcal{E}$ formée de tous les points γp, $p \in V$. Il est clair que toute action discrète est libre.

Problème 4. Démontrer que *toute action discrète est une action principale* (voir définition 2 de la leçon 1).

Soit U l'image du voisinage V par la projection canonique

$$\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\Gamma, \quad p \mapsto \Gamma p, \quad p \in \mathcal{E}.$$

Comme

$$\pi^{-1} U = \coprod_{\gamma \in \Gamma} \gamma \Gamma \tag{7}$$

et tous les ensembles γV sont ouverts, l'ensemble $\pi^{-1}U$ l'est de même. Par conséquent, U est un ouvert d'après la définition de la topologie quotient. Puisque la restriction de π à chaque γV est un homéomorphisme de γV sur l'ouvert U (le démontrer !) et qu'on a la décomposition (7), l'ensemble U est de plus bien recouvert par π. Les ensembles U formant une base des ouverts de l'espace quotient $\mathcal{E}/\Gamma$, cela prouve que *la projection* $\mathcal{E} \to \mathcal{E}/\Gamma$ *est un revêtement pour toute action discrète* $\Gamma \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$.

C'est manifestement vrai pour $\mathcal{E} \times \Gamma \to \mathcal{E}$ une action discrète à droite.

Exemple 6. La théorie des fonctions d'une variable complexe nous enrichit d'une autre classe des revêtements.

On rappelle que toute fonction analytique (multivoque en général) $w = w(z)$ définie dans un domaine G du plan complété de la variable complexe s'interprète comme fonction univoque sur sa *surface de Riemann* $\mathscr{X}$, variété analytique complexe de dimension un (donc, variété analytique réelle de dimension 2) qui se projette sur G. Cela étant, la projection $\pi : \mathscr{X} \to G$ recouvre bien tout ouvert $U \subset G$ dépourvu de *points de ramification* de la fonction w. Aussi, on obtient un revêtement à condition d'éliminer les points de ramification contenus dans G (et leurs images réciproques de $\mathscr{X}$).

Dans le cas particulier de $w = w(z)$, inverse de la fonction holomorphe univoque $z = z(w)$, ce revêtement est réalisé par cette dernière (après qu'on chasse de son domaine de définition tous les points où sa dérivée est nulle).

Par exemple, $z = w^n$ réalise le revêtement à n feuillets $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, et le revêtement à un nombre infini de feuillets $\mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ l'est par $z = e^w$.

Quand les espaces $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ sont des variétés différentiables (resp. analytiques complexes), le revêtement $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ est dit *différentiable* (resp. *analytique complexe*) si chaque point $b \in \mathscr{B}$ admet un voisinage U bien recouvert tel que toutes les applications (2) soient des difféomorphismes (resp. homéomorphismes analytiques complexes).

Chaque revêtement différentiable $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ est certes une application différentiable, mais tout revêtement application différentiable $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$ n'est pas différentiable. Témoin tout homéomorphisme différentiable qui n'est pas un difféomorphisme.

Les revêtements des exemples 1, 2, 4 et du problème 2 sont évidemment différentiables.

Problème 5. Démontrer que *si l'espace* $\mathscr{B}$ *du revêtement* $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ *est une variété différentiable* (resp. *analytique complexe*), *on définit sur* $\mathscr{E}$ *une structure différentiable* (resp. *analytique complexe*) *unique pour laquelle* $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ *est un revêtement différentiable* (resp. *analytique complexe*). [*Indication*. Les cartes de cette structure sont les couples $(V, k \circ \pi)$, où k est l'application de coordonnées d'un voisinage de coordonnées bien recouvert $U \subset \mathscr{B}$ quelconque et V un ensemble tel que l'application $\pi|_V$ soit un homéomorphisme $V \to U$.

* * *

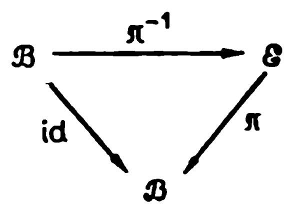
Comme l'espace de revêtement est assujetti à être connexe, aucun fibré trivial $\mathscr{B} \times \mathscr{F} \to \mathscr{B}$, tel que l'ensemble (espace discret) $\mathscr{F}$ contienne plus d'un point, n'est un revêtement.

Par ailleurs, l'application identique id : $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ en est évidemment un.

Il en va de même pour tout homéomorphisme $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$.

Ces revêtements sont dits *triviaux* (ou à *un feuillet*).

Le diagramme



montre qu'*un revêtement est trivial si et seulement s'il est isomorphe au revêtement* id : $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$.

Un espace $\mathscr{B}$ dont tous les revêtements sont triviaux, est dit *non recouvrable*.

Nous nous proposons de décrire (à un isomorphisme près) tous les revêtements de $\mathscr{B}$ donné et d'établir en particulier les conditions sous lesquelles cet espace est non recouvrable. On exige que $\mathscr{B}$ soit séparé, connexe par arcs, localement connexe par arcs (voir III.15) et *semi-localement simplement connexe* (propriété que nous introduirons en temps et lieu). Dans le cas contraire, la théorie des revêtements se complique singulièrement. Il y a plus. Ces conditions sont en fait satisfaites dans tous les cas d'un intérêt géométrique certain (en particulier si $\mathscr{B}$ est une variété séparée connexe).

Il est clair que si un ensemble $U \subset \mathscr{B}$ est bien recouvert par (1), tout $U' \subset U$ l'est encore. Aussi, tous les ensembles ouverts bien recouverts $U \subset \mathscr{B}$ forment une base de $\mathscr{B}$, et si ce dernier espace est localement connexe par arcs, sa base est formée de tous les ouverts bien recouverts connexes par arcs.

Pareillement, si les ensembles ouverts $U \subset \mathscr{B}$ sont bien recouverts par des ouverts $V \subset \mathscr{E}$, ceux-ci forment tous une base de $\mathscr{E}$, et si $\mathscr{E}$ (ou, ce qui revient au même, $\mathscr{B}$) est localement connexe par arcs, il en est de même de tous les ouverts bien recouvrant connexes par arcs.

On voit en particulier que *tout revêtement* $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ *est un homéomorphisme local* (chaque point $p \in \mathscr{E}$ admet un voisinage V qui s'applique homéomorphiquement sur un voisinage U du point $\pi(p) = b$), si bien que *c'est une application ouverte.*

On conçoit que toute propriété locale de l'espace $\mathscr{B}$ devient celle de chacun de ses espaces de revêtement $\mathscr{E}$ (on l'a déjà constaté en ce qui concerne la connexité locale par arcs). La propriété de séparation (propriété non locale !) l'atteste elle aussi : *l'espace* $\mathscr{E}$ *est séparé dès que* $\mathscr{B}$ *l'est.* Soient, en effet, p et q deux points distincts de $\mathscr{E}$. Si $\pi(p) = \pi(q)$, alors p et q appartiennent, pour tout voisinage bien recouvert U de $\pi(p)$, à deux ouverts V_1 et V_2 distincts qui recouvrent bien U. Aussi, la propriété de séparation est manifestement remplie. Mais si $\pi(p) \neq \pi(q)$, la propriété de $\mathscr{B}$ d'être séparé fait que les points $\pi(p)$ et $\pi(q)$ possèdent dans $\mathscr{B}$ des voisinages U_1, U_2 disjoints dont les images réciproques $V_1 = \pi^{-1}U_1$ et $V_2 = \pi^{-1}U_2$ constituent justement les voisinages disjoints de p et q dans $\mathscr{E}$. □

* * *

La description de tous les revêtements s'effectue après un prélude assez long.

On rappelle (voir définition 2 de III.11) qu'un *chemin* dans un espace topologique $\mathscr{X}$ est l'application continue

$$u: I \to \mathscr{X}$$

du segment $I = [0, 1]$ dans $\mathscr{X}$. Le point $p_0 = u(0)$ est l'*origine* du chemin u et $p_1 = u(1)$ en est l'*extrémité*. On dit également que *u joint p_0 à p_1*.

Soit $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ une application continue (un fibré), arbitraire pour l'instant.

Un chemin $v: I \to \mathscr{E}$ de l'espace $\mathscr{E}$ *recouvre* (par l'application π) un chemin $u: I \to \mathscr{B}$ de l'espace $\mathscr{B}$ si $u = \pi \circ v$.

La propriété ci-dessous des revêtements est à la base de toute leur théorie.

Théorème 1 (**théorème d'existence et d'unicité d'un chemin de revêtement**). *Soient $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ un revêtement quelconque, p_0 un point arbitraire de l'espace $\mathscr{E}$, et $u: I \to \mathscr{B}$ un chemin quelconque d'origine $b_0 = \pi(p_0)$ de l'espace $\mathscr{B}$. Il existe un chemin $v: I \to \mathscr{E}$ d'origine p_0 de $\mathscr{E}$ qui est un revêtement de u:*

$$u = \pi \circ v, \quad u(0) = p_0.$$

Si $\mathscr{B}$ est séparé, le chemin v est unique.

D é m o n s t r a t i o n. *Unicité*. Soient v et v' deux chemins d'origine p_0 qui recouvrent u.

Considérons le sous-ensemble C de I formé des nombres t tels que $v(t) = v'(t)$. Ce sous-ensemble contenant 0 n'est pas vide.

Quel que soit le point $t_0 \in C$, il existe par hypothèse dans $\mathscr{E}$ un voisinage V du point $v(t_0) = v'(t_0)$ qui se projette homéomorphiquement sur un voisinage U du point $\pi(v(t_0)) = u(t_0)$. Comme v et v' sont continues, on trouve un nombre $\delta > 0$ tel que $v(t) \in V$ et $v'(t) \in V$ pour $|t - t_0| < \delta$.

Mais si $v(t), v'(t) \in V$, la bijectivité de π sur V entraîne nécessairement $v(t) = v'(t)$, donc $t \in C$. Ainsi, il existe pour tout $t_0 \in I$ un $\delta > 0$ tel que tous les points $t \in I$, $|t - t_0| < \delta$, appartiennent à C. Par définition C est donc ouvert dans I.

D'autre part, l'ensemble C n'est autre que l'image réciproque de la diagonale $\Delta = \{(p, p);\ p \in \mathscr{E}\}$ par l'application continue $I \to \mathscr{E} \times \mathscr{E}$ qui envoie $t \in I$ en $(v(t), v'(t)) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$. Aussi, C est fermé du moment que l'espace $\mathscr{B}$ (et, partant, $\mathscr{E}$) est séparé par hypothèse (si bien que Δ est fermée).

L'ensemble C étant un sous-ensemble non vide ouvert et fermé du segment I coïncide, par suite de la connexité de I, avec ce seg-

ment tout entier. Par conséquent, $v(t) = v'(t)$ pour tout $t \in I$, i.e. $v = v'$.

Existence. La compacité de I entraîne de suite qu'il existe sur I des nombres

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$$

et dans l'espace $\mathscr{B}$ des voisinages bien recouverts

$$U_1, \ldots, U_n,$$

tels que les points $u(t)$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, soient pour tout $i = 1, \ldots, n$ dans le voisinage U_i. On suppose le chemin v construit sur $[0, t_{i-1}]$ pour un i, $1 \leqslant i \leqslant n$, i.e. on suppose construite une application $v: [0, t_{i-1}] \to \mathscr{E}$ pour laquelle $v(0) = p_0$ et $\pi \circ v = u$ sur $[0, t_{i-1}]$. (Si $i = 1$, cette condition est automatiquement vérifiée.) Comme $u(t_{i-1}) \in U_i$, l'espace $\mathscr{E}$ contient un voisinage V_i du point $v(t_{i-1})$ qui recouvre bien U_i.

Soit s_i l'homéomorphisme $U_i \to V_i$ inverse de l'homéomorphisme $\pi: V_i \to U_i$. On prolonge v sur le segment $[t_{i-1}, t_i]$ en posant

$$v(t) = s_i(u(t)) \quad \text{pour tout} \quad t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Ainsi, le chemin de revêtement v se trouve évidemment construit sur $[0, t_i]$ et, au bout de n pas, sur I tout entier. □

On apporte une précision appréciable sur le théorème 1 qui doit alors s'énoncer en termes différents.

* * *

On désigne par $\mathscr{P}(\mathscr{X})$ l'ensemble de tous les chemins d'un espace topologique (connexe par arcs en général) $\mathscr{X}$ quelconque et par $\langle K, U\rangle$, avec K un sous-ensemble fermé (= compact) de I et U une partie ouverte de $\mathscr{X}$, le sous-ensemble de $\mathscr{P}(\mathscr{X})$ formé de tous les chemins $u: I \to \mathscr{X}$ tels que

$$u(t) \in U \quad \text{pour} \quad t \in K.$$

On considère toutes les intersections finies d'ensembles $\langle K, U\rangle$ comme base d'une topologie sur $\mathscr{P}(\mathscr{X})$.

Définition 2. Cette topologie s'appelle *topologie compacte-ouverte* de $\mathscr{P}(\mathscr{X})$.

L'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{X})$ sera toujours supposé muni de la topologie compacte-ouverte.

Définition 3. On appelle *cocylindre* d'une application continue $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$, et on note Cocyl π, le sous-espace du produit direct $\mathscr{E} \times \mathscr{P}(\mathscr{B})$ formé des couples (p_0, u), $p_0 \in \mathscr{E}$, $u: I \to \mathscr{B}$, tels que

$$\pi(p_0) = u(0).$$

[En termes de catégories, Cocyl π n'est autre que le *coamalgame* du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \mathscr{P}(\mathscr{B}) \\ & & \downarrow \\ \mathscr{E} & \xrightarrow{\pi} & \mathscr{B} \end{array}$$

dont la flèche verticale est l'application $\mathscr{P}(\mathscr{B}) \to \mathscr{B}$ envoyant un chemin u quelconque en le point $u(0)$.]

L'appartenance du couple $(p_0, u) \in \mathscr{E} \times \mathscr{P}(\mathscr{B})$ au sous-espace Cocyl π constitue une condition nécessaire pour qu'il existe pour u le chemin de revêtement $v: I \to \mathscr{E}$ d'origine p_0. La condition suffisante en est que (p_0, u) soit dans l'image de l'application (évidemment continue)

$$\pi_! : \mathscr{P}(\mathscr{E}) \to \text{Cocyl } \pi$$

définie par

$$\pi_!(v) = (v(0), \pi \circ v), \quad v \in \mathscr{P}(\mathscr{E}).$$

Aussi, *le problème de construire un chemin de revêtement admet une solution pour tout couple* (p_0, u) *si et seulement si* $\pi_!$ *est une surjection.* Cela étant, donner pour tout couple $(p_0, u) \in$ Cocyl π le chemin de revêtement v, c'est construire une section de $\pi_!$, i.e. (voir leçon 1) une application

$$s: \text{Cocyl } \pi \to \mathscr{P}(\mathscr{E})$$

telle que $\pi_! \circ s = \text{id}$.

Ainsi, le théorème 1 équivaut (pour $\mathscr{B}$ séparé) à dire que *quel que soit le revêtement* $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$, *l'application* $\pi_!$ *admet une section unique, i.e. que* $\pi_!$ *est une bijection.* Mais cette section est-elle continue? (Et l'application $\pi_!$ est-elle un homéomorphisme?) Le théorème ne dit rien là-dessus. Maintenant on peut corriger ce défaut.

Proposition 1. *Quel que soit le revêtement* $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ *de l'espace séparé* $\mathscr{B}$, *l'application*

$$\pi_! : \mathscr{P}(\mathscr{E}) \to \text{Cocyl } \pi, \quad v \mapsto (v(0), \pi \circ v),$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. Il suffit de montrer que l'ensemble $\pi_! \langle K, V \rangle$, avec $K \subset I$ un ensemble compact quelconque et $V \subset \mathscr{E}$ un ouvert quelconque, est ouvert dans Cocyl π. Mais

$$\pi_! \langle K, V \rangle = (V \times \langle K, U \rangle) \cap \text{Cocyl } \pi,$$

$U = \pi V$, par définition. Comme π est ouverte, l'ensemble U est ouvert dans $\mathscr{B}$ et, partant, $V \times \langle K, U \rangle$ l'est dans $\mathscr{E} \times \mathscr{P}(\mathscr{B})$. Aussi, $\pi_! \langle K, V \rangle$ est un ensemble ouvert dans Cocyl π. $\square$

* * *

Définition 4. Les sections continues

$$s: \text{Cocyl } \pi \to \mathcal{P}(\mathcal{E})$$

de l'application $\pi_1: \mathcal{P}(\mathcal{E}) \to \text{Cocyl } \pi$ s'appellent *connexions* (ou, plus généralement, *connexions au sens de Hurewicz*). Une application $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ (ou un triplet $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$), telle qu'il existe au moins une connexion s, est dite *fibration* (ou fibré) *au sens de Hurewicz.*

En ces termes, le théorème 1 et la proposition 1 affirment que *tout revêtement d'un espace séparé connexe est une fibration au sens de Hurewicz qui admet une connexion unique.*

Remarque 2. Tout fibré trivial $\pi: \mathcal{B} \times \mathcal{F} \to \mathcal{B}$ est encore une fibration de Hurewicz (qui admet peut-être plusieurs connexions). (La connexion s d'un tel fibré est définie par exemple par la formule

$$[s(p_0, u)](t) = (u(t), x_0) \quad \text{si } p_0 = (b_0, x_0), \quad b_0 \in \mathcal{B}, \quad x_0 \in \mathcal{F},$$

où $0 \leqslant t \leqslant 1$.) On s'attend donc naturellement à trouver, parmi les fibrations de Hurewicz, tous les fibrés localement triviaux et, ce qui plus est, toute application $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ telle qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de $\mathcal{B}$ pour lequel chaque

$$\pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}: \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$$

soit une fibration de Hurewicz. Selon Dold, la dernière affirmation est effectivement juste si l'on suppose (ce qui ne nuit nullement pas à la généralité) que $\{U_\alpha\}$ est numérotable (voir remarque 4 de III.24). La démonstration donnée par Dold a beau reposer sur une idée simple, elle est assez ardue, ce qui nous oblige à l'omettre. (Quiconque désire connaître les dangers qu'on court en l'occurrence et comprendre le rôle de la propriété « être numérotable » est libre de démontrer le théorème de Dold pour $\{U_\alpha\}$ à deux éléments.)

Ci-dessous un exemple de fibration de Hurewicz non localement triviale (dont on se sert volontiers en topologie).

Exemple 7. Soit $\mathcal{X}$ un espace topologique quelconque, et soit $\rho: \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ l'application qui fait correspondre à chaque chemin u de $\mathcal{X}$ son extrémité:

$$\rho(u) = u(1), \quad u: I \to \mathcal{X}.$$

Il se trouve que ρ *constitue une fibration de Hurewicz.* En effet, le cocylindre Cocyl ρ de ρ est formé des couples (v, u), avec v et u des chemins de $\mathcal{X}$ pour lesquels $v(1) = u(0)$. Cela étant, la formule

$$(8) \qquad w(t)(\tau) = \begin{cases} v\left(\dfrac{2\tau}{2-t}\right) & \text{si } 0 \leqslant \tau \leqslant \dfrac{2-t}{2}, \\ u(t+2\tau-2) & \text{si } \dfrac{2-t}{2} \leqslant \tau \leqslant 1, \end{cases}$$

définit (le vérifier !) pour tout (v, u) le chemin $w : t \mapsto w(t)$ de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ qui vérifie les relations $w(0)(\tau) = v(\tau)$ et $w(t)(1) = u(t)$, $\tau, t \in I$, quelconques, i.e. $w(0) = v$ et $\rho \circ w = u$. Aussi, on pose $s(v, u) = w$ et on obtient une section continue (le vérifier !) de l'application ρ_1. □

Le chemin w défini par (8) est tel que $w(t)(0) = v(0)$ quel que soit $t \in I$. Si l'on choisit un point $p_0 \in \mathcal{X}$ et qu'on introduise le sousespace $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X})$ de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ formé des chemins $u : I \to \mathcal{X}$ d'origine p_0, *l'application*

$$\rho : \mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}) \to \mathcal{X}, \quad u \mapsto u(1),$$

est donc une fibration de Hurewicz.

Ces exemples montrent qu'une fibration de Hurewicz peut posséder des fibres non homéomorphes, voire ne pas être une surjection (si sa base est non connexe par arcs).

LEÇON 3

Classes d'homotopie des chemins. — Groupe fondamental d'un espace topologique. — Connexité simple des espaces contractiles. — Connexité simple d'une sphère. — Groupe fondamental d'une circonférence.

La formule

$$e_p(t) = p, \quad t \in I,$$

définit pour tout point p d'un espace topologique $\mathscr{X}$ un chemin $e_p: I \to \mathscr{X}$ appelé *chemin constant en p* (cf. leçon III.11). Ce chemin joint p à lui-même.

Pareillement, la formule

$$u^{-1}(t) = u(1-t), \quad t \in I,$$

définit pour tout chemin $u: I \to \mathscr{X}$ le *chemin opposé* $u^{-1}: I \to \mathscr{X}$ qui relie l'extrémité $u(1)$ de u à son origine $u(0)$.

Si $u(1)$ se confond avec l'origine $v(0)$ d'un chemin v, la formule

$$(uv)(t) = \begin{cases} u(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ v(2t-1) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

donne le chemin uv, *produit* de u et v, qui joint l'origine $u(0)$ de u à l'extrémité $v(1)$ de v.

On en a déjà parlé dans III.11, mais voici une définition nouvelle.

Définition 1. Deux chemins u et v qui relient les mêmes points p_0 et p_1 (i.e. tels que $u(0) = v(0) = p_0$, $u(1) = v(1) = p_1$) sont dits *homotopes* (ce qui se note $u \sim v$) s'il existe une application continue

$$f: I^2 \to \mathscr{X}, \quad (t, \tau) \mapsto f(t, \tau), \quad (t, \tau) \in I^2, \tag{1}$$

telle que

$$f(t, 0) = u(t), \quad f(t, 1) = v(t)$$

et

$$f(0, \tau) = p_0, \quad f(1, \tau) = p_1$$

quels que soient $t, \tau \in I$. L'application f est une *homotopie de u à v*.

Proposition 1. *La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{X}, p_1)$ de tous les chemins de $\mathscr{X}$ allant du point p_0 au point p_1.*

Les classes des homotopies sont les *classes d'homotopie* des chemins. On note $[u]$ la classe d'homotopie contenant le chemin u.

De deux démonstrations que nous allons donner, la première (plus instructive) utilise la topologie de l'espace $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$ et la seconde ne s'appuie que sur la définition 1.

Première démonstration. Chaque homotopie (1) définit par

$$w(\tau)(t) = f(t, \tau), \quad t, \tau \in I,$$

l'application continue (le démontrer !) $w: \tau \mapsto w(\tau)$ du segment I dans $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$, qui vérifie $w(0) = u$ et $w(1) = v$, i.e. un chemin de cet espace qui en relie les points u et v. Inversement, tout chemin $w: I \to \mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$ de $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$ qui relie le chemin u au chemin v définit par

$$f(t, \tau) = w(\tau)(t), \quad t, \tau \in I,$$

l'homotopie (1) de u à v. Ainsi, *les homotopies ne sont autres que les chemins de l'espace* $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$, si bien que la relation d'homotopie est un cas particulier de la relation « être reliés par un chemin ». La relation d'homotopie est donc (voir leçon III.11) une relation d'équivalence. □

Il y a plus. *Les classes d'homotopie des chemins de* $\mathcal{X}$ *qui joignent le point* p_0 *au point* p_1 *ne sont autres que les composantes connexes par arcs de* $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$.

Seconde démonstration. (Il s'agit en fait de traduire en termes d'homotopies l'affirmation « la relation « être reliés par un chemin » est une relation d'équivalence » démontrée dans III.11.) Quel que soit le chemin $u: I \to \mathcal{X}$, la formule

$$f(t, \tau) = u(t), \quad t, \tau \in I,$$

définit l'homotopie qui relie u à lui-même. La relation d'homotopie est donc réflexive. Pour toute homotopie f de u à v, l'égalité

$$g(t, \tau) = f(t, 1 - \tau), \quad t, \tau \in I,$$

définit de même l'homotopie g de v à u, i.e. la relation d'homotopie est symétrique.

Si l'homotopie f relie le chemin u au chemin v et si g est une homotopie de v à w, alors l'homotopie fg définie (manifestement bien) par

$$(2) \qquad (fg)(t, \tau) = \begin{cases} f(t, 2\tau) & \text{si } 0 \leqslant \tau \leqslant 1/2, \\ g(t, 2\tau - 1) & \text{si } 1/2 \leqslant \tau \leqslant 1, \end{cases}$$

relie u à w. Par conséquent, la relation d'homotopie est transitive. □

* * *

On note un grand intérêt des chemins dont l'origine est égale à l'extrémité, i.e. qui, s'ils commencent en un point p_0, y aboutissent. Ce sont des *lacets en* p_0. On note $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ l'ensemble des classes d'homotopie de tous les lacets en p_0.

On multiplie les homotopies entre elles (quand cela a un sens) non seulement par rapport à la deuxième variable (voir (2)), mais aussi par rapport à la première:

$$(fg)(t, \tau) = \begin{cases} f(2t, \tau) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ g(2t-1, \tau) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{3}$$

Si f est une homotopie de u_0 à u_1 et g une homotopie de v_0 à v_1, leur produit (3) par rapport à la première variable est défini si et seulement si l'extrémité commune des chemins u_0 et u_1 se confond avec l'origine commune des chemins v_0 et v_1, ce qui fait que l'homotopie (3) relie le chemin u_0v_0 au chemin u_1v_1. Ainsi, *la formule*

$$[u]\cdot[v] = [uv] \tag{4}$$

définit parfaitement le produit $[u]\cdot[v]$ *des classes d'homotopie* $[u]$ *et* $[v]$ *si* $u(1) = v(0)$.

Ce produit est en particulier défini pour n'importe quels éléments de l'ensemble $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$.

Proposition 2. *L'ensemble* $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ *est un groupe pour la multiplication* (4). *L'unité de ce groupe est la classe* $[e_{p_0}]$ *du chemin constant* e_{p_0}, *et la classe* $[u]^{-1}$, *l'inverse de la classe* $[u]$ *du lacet* u, *est* $[u^{-1}]$, *classe du lacet opposé* u^{-1}.

La démonstration s'appuie sur certaines considérations d'ordre général qui expliquent l'opération de multiplication des classes d'homotopie des chemins.

Nous dirons que l'application continue $u: [a, b] \to \mathscr{X}$ d'un segment quelconque $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans l'espace $\mathscr{X}$ est un *chemin généralisé* de $\mathscr{X}$ d'*origine* le point $u(a)$ et d'*extrémité* le point $u(b)$.

Remarque 1. La notion de chemin généralisé s'identifie en fait à celle d'une courbe. Nous emploierons l'un ou l'autre de ces termes selon le contexte dicté essentiellement par la tradition.

Si $u: [a, b] \to \mathscr{X}$ et $v: [c, d] \to \mathscr{X}$ sont deux chemins généralisés pour lesquels $u(b) = v(c)$, la formule

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } a \leqslant t \leqslant b, \\ v(t-b+c) & \text{si } b \leqslant t \leqslant b+d-c, \end{cases}$$

donne le chemin généralisé $w: [a, b+d-c] \to \mathscr{X}$ noté $u * v$, qui est dit *composé* des chemins u et v.

Soit c un point quelconque de $[a, b]$. Chaque chemin généralisé $u: [a, b] \to \mathscr{X}$ est composé de $u|_{[a, c]}$ et de $u|_{[c, b]}$.

Il est clair que *l'opération de composition des chemins est associative*, i.e. étant donné trois chemins u, v, w, si le chemin $(u * v) * w$ est défini, il en est de même de $u * (v * w)$ et

$$(u * v) * w = u * (v * w).$$

Aussi, $u_1 * \ldots * u_n$ composé de n chemins $u_1, \ldots, u_n$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel ces chemins sont pris, ce qui rend superflu l'emploi des parenthèses.

On compose les chemins $u: I \to \mathcal{X}$ et $v: I \to \mathcal{X}$ non généralisés à condition que $u(1) = v(0)$. Le chemin généralisé $u * v$ ainsi obtenu est défini sur $[0, 2]$ par

$$(u * v)(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ v(t) & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases} \tag{5}$$

Soit, d'autre part, $\varphi: [0, 1] \to [a, b]$ une fonction continue arbitraire qui envoie les points 0 et 1 en les points a et b respectivement. On fait correspondre à chaque chemin généralisé $u: [a, b] \to \mathcal{X}$ défini sur $[a, b]$ le chemin non généralisé

$$u \circ \varphi: I \to \mathcal{X}$$

qui joint les mêmes points. Nous dirons que le chemin $u \circ \varphi$ est obtenu du chemin u par le *changement de paramètre* φ *relativement au segment unité* I.

Ainsi, le chemin défini par la formule (8) de la leçon 2 est obtenu à partir du chemin $v * u_t$ composé du chemin v et de la restriction $u_t = u \mid_{[0, t]}$ de u à $[0, t]$ par le changement de paramètre $\varphi: [0, 1] \to [0, 1 + t]$ relativement au segment unité, dont voici le graphique

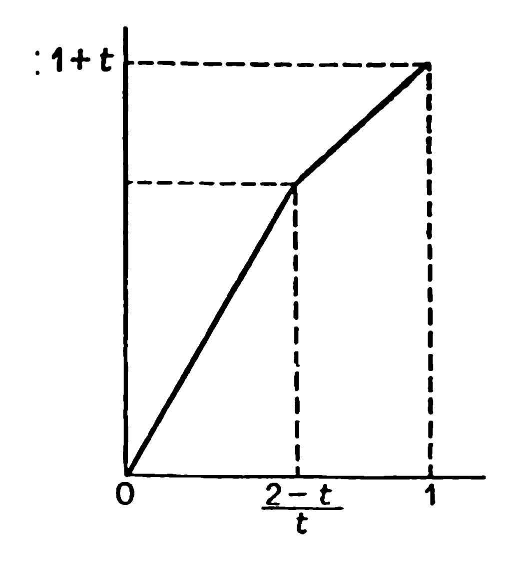


Fig. 1.

Cela rend parfaitement claire la construction liée à ce chemin.

Chose remarquable, *la classe d'homotopie* $[u \circ \varphi]$ *du chemin* $u \circ \varphi$ *ne dépend pas du choix de la fonction* φ. En effet, si ψ est une autre fonction continue $[0, 1] \to [a, b]$ qui envoie les points 0 et 1 en les points a et b respectivement, alors

$$f(t, \tau) = u((1-\tau)\varphi(t) + \tau\psi(t)), \quad t, \tau \in I,$$

définit l'homotopie f de $u \circ \varphi$ à $u \circ \psi$. □

En particulier, c'est juste pour le chemin (5). Mais il est transformé par le changement de paramètre $\varphi: t \mapsto 2t$ dans le produit uv des chemins u et v. Aussi, le produit $[u]\cdot[v]$ des classes d'homotopie $[u]$ et $[v]$ est la classe d'homotopie d'un changement de paramètre *arbitraire* du chemin $u * v$.

Soient u, v et w des chemins pour lesquels on définit les produits $(uv)w$ et $u(vw)$, i.e. tels que $u(1) = v(0)$ et $v(1) = w(0)$. Les chemins $(uv)w$ et $u(vw)$ sont évidemment les changements de paramètre du chemin $u * v * w$, si bien qu'il y a coïncidence de leurs classes d'homotopie, i.e. on a

$$([u]\cdot[v])\cdot[w] = [u]\cdot([v]\cdot[w]).$$

Cela signifie par définition *l'associativité de la multiplication des classes d'homotopie des chemins.*

En particulier, la multiplication dans l'ensemble $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ jouit également de cette propriété.

Soit $[c, d] \subset [a, b]$, i.e. $a \leqslant c < d \leqslant b$. On dit que le chemin généralisé $u: [a, b] \to \mathscr{X}$ *est constant sur* $[c, d]$ si $u(t) = u(c)$ pour tout $t \in [c, d]$. Ce chemin définit sur $[a, b-d+c]$ un chemin u' pour lequel

$$u'(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } a \leqslant t \leqslant c, \\ u(t+d-c) & \text{si } c \leqslant t \leqslant b-d+c. \end{cases}$$

Autrement dit, $u' = u_1 * u_2$, avec u_1 et u_2 les restrictions de u à $[a, c]$ et $[d, b]$ respectivement. Cela étant, $u = u' \circ \varphi_0$, où φ_0 est la fonction $[a, b] \to [a, b-d+c]$ donnée par

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} t & \text{si } a \leqslant t \leqslant c, \\ c & \text{si } c \leqslant t \leqslant d, \\ t-d+c & \text{si } d \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

Aussi, tout changement de paramètre φ de u' donne le changement de paramètre $\varphi' = \varphi_0 \circ \varphi$ de u tel que $u \circ \varphi = u' \circ \varphi'$. Par conséquent, *les classes d'homotopie des changements de paramètre des chemins* u *et* u' *coïncident.*

Soient maintenant u un chemin $I \to \mathscr{X}$, e_0 le chemin constant en $p_0 = u(0)$ et e_1 le chemin constant en $p_1 = u(1)$. Le chemin $(u * e_1)'$ coïncide pour $u * e_1$ avec u et le chemin $(e_0 * u)'$ s'ob-

tient pour $e_0 * u$ à partir de u par translation du paramètre. Aussi

$$[e_0]\cdot[u] = [u] \quad \text{et} \quad [u]\cdot[e_1] = [u].$$

Cela prouve en particulier que *la classe d'homotopie* $[e_{p_0}]$ *du lacet constant* e_{p_0} *est l'unité pour la multiplication dans* $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$.

Un chemin généralisé $u: [a, b] \to \mathscr{X}$ est dit *symétrique* si

$$u(t) = u(a + b - t) \quad \text{pour tout } t \in [a, b]$$

(en particulier, on a donc $u(b) = u(a)$). Etant donné ce chemin u, la formule

$$f(t, \tau) = \begin{cases} u(c-(c-a)\tau) & \text{si } c-(c-a)\tau \leqslant t \leqslant c, \\ u(c+(b-c)\tau) & \text{si } c \leqslant t \leqslant c+(b-c)\tau, \\ u(t) & \text{pour tout } t \text{ restant,} \end{cases}$$

avec $c = \frac{a+b}{2}$ le milieu du segment $[a, b]$, définit bien l'application continue

$$f: [a, b] \times I \to \mathscr{X}$$

qui vérifie pour tout $t \in [a, b]$ et tout $\tau \in I$ les relations

$$f(t, 0) = u(t),$$
$$f(t, 1) = f(a, \tau) = f(b, \tau) = p_0, \quad \text{où} \quad p_0 = u(a),$$

et détermine donc pour tout changement de paramètre φ de u l'homotopie $f \circ (\varphi \times \mathrm{id})$ reliant le chemin $u \circ \varphi$ au chemin constant e_{p_0} au point $p_0 = u(a)$. Par conséquent,

$$[u \circ \varphi] = [e_{p_0}].$$

Dans le cas particulier de u défini sur $[0, 1]$ (i.e. c'est un *lacet symétrique*), on n'a pas besoin de φ, si bien que $[u] = [e_{p_0}]$. Comme les lacets uu^{-1} et $u^{-1}u$ sont évidemment symétriques pour tout lacet u en p_0, on a

$$[u]\cdot[u^{-1}] = [u^{-1}]\cdot[u] = [e_{p_0}]$$

quel que soit $[u] \in \pi_1(\mathscr{X}, p_0)$, i.e. $[u]^{-1} = [u^{-1}]$, ce qui achève la démonstration de la proposition 2. □

Définition 2. Le groupe $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ est le *groupe fondamental de l'espace* $\mathscr{X}$ *au point* p_0.

Remarque 2. Un algébriste dirait que les propriétés algébriques de la multiplication des classes d'homotopie des chemins (qu'on a établies au cours de la démonstration de la proposition 2) signifient que *l'ensemble de toutes ces classes est un groupoïde pour la multiplication*. On l'appelle *groupoïde fondamental de l'espace* $\mathscr{X}$.

* * *

Nous exposerons sur plusieurs exemples les procédés de calcul des groupes fondamentaux de tel ou tel espace.

On note en premier lieu que chaque lacet en p_0 de $\mathscr{X}$ est évidemment un lacet de sa composante connexe par arcs $\mathscr{X}_0$ contenant p_0, si bien que

$$\pi_1(\mathscr{X}, p_0) = \pi_1(\mathscr{X}_0, p_0).$$

Aussi, il suffit de se borner aux espaces connexes par arcs.

Exemple 1. Soient $\mathscr{X}$ la boule unité B^n de l'espace $\mathbb{R}^n$, et p_0 son centre 0. Pour tout lacet $u: I \to \mathsf{B}^n$ en 0, la formule

$$f(t, \tau) = (1 - \tau)\, u(t), \quad t, \tau \in I,$$

définit (c'est clair) l'homotopie f reliant le chemin u au chemin constant e_0. Aussi, $[u] = [e_0]$, et *le groupe* $\pi_1(\mathsf{B}^n, 0)$ *est* donc *trivial* (l'unité est son seul élément).

C'est encore la raison de la trivialité du groupe $\pi_1(\mathring{\mathsf{B}}^n, 0)$, avec $\mathring{\mathsf{B}}^n$ une boule ouverte (intérieur de B^n).

Définition 3. Un espace $\mathscr{X}$ connexe par arcs, tel que le groupe $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ ne comprenne que l'unité, est dit *simplement connexe* (cette propriété ne dépend pas du choix de p_0; voir leçon 4).

Ainsi, *la boule* B^n *est simplement connexe* (pour tout $n \geqslant 0$), *ainsi que la boule* $\mathring{\mathsf{B}}^n$.

Ce résultat est susceptible d'une généralisation immédiate.

Un espace $\mathscr{X}$ (nécessairement connexe par arcs) est *contractile en le point* p_0 s'il existe une application continue

$$F: \mathscr{X} \times I \to \mathscr{X}$$

telle que $F(p, 0) = p$, $F(p, 1) = p_0$ pour $p \in \mathscr{X}$ quelconque et $F(p_0, \tau) = p_0$ pour tout $\tau \in I$, auquel cas la formule

$$f(t, \tau) = F(u(t), \tau), \quad t, \tau \in I,$$

définit pour chaque lacet $u: I \to \mathscr{X}$ en p_0 l'homotopie qui relie le chemin u au chemin constant e_{p_0}. Ainsi, *tout espace contractile est simplement connexe.*

S'agissant de la boule B^n, l'application F est définie par

$$F(\mathbf{x}, \tau) = \tau\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathsf{B}^n.$$

On n'aborde des exemples plus compliqués qu'après un travail préparatoire.

* * *

Soit $\mathscr{X}$ une variété différentiable.

Un chemin généralisé $u: [a, b] \to \mathscr{X}$ est dit *différentiable* s'il constitue une application différentiable, et il est dit *différentiable par morceaux* s'il est composé de chemins différentiables en nombre fini.

Lemme 1. *Tout chemin $u: [a, b] \to \mathscr{X}$ sur une variété différentiable $\mathscr{X}$ est homotope à un chemin différentiable par morceaux.*

D é m o n s t r a t i o n. Comme le segment $[a, b]$ (et, partant, l'ensemble $u([a, b])$) est compact, il existe dans $\mathscr{X}$ des voisinages de coordonnées en nombre fini (supposés difféomorphes, pour fixer les idées, à la boule unité ouverte $\mathring{B}^n$ de $\mathbb{R}^n$) qui recouvrent $u([a, b])$.

Cela signifie par définition que le chemin u est composé d'un nombre fini de chemins qui sont tous des applications dans un voisinage de coordonnées. Il suffit donc d'établir le lemme 1 pour les chemins doués de cette propriété, i.e., à vrai dire, pour les chemins dans $\mathring{B}^n$.

Soit $u: [a, b] \to \mathring{B}^n$ un chemin quelconque dans la boule $\mathring{B}^n$. On pose

$$v(t) = (1 - t)\, u(a) + t u(b), \quad t \in I,$$

et

$$f(t, \tau) = (1 - \tau)\, u(t) + \tau\, v(t), \quad t, \tau \in I.$$

La première formule détermine le chemin différentiable $v: [a, b] \to \mathring{B}^n$, et la seconde, l'homotopie f de u à v. □

Problème 1. Démontrer que tout chemin $u: [a, b] \to \mathscr{X}$ est homotope à un chemin différentiable.

Revenons aux groupes fondamentaux.

Exemple 2. On calcule le groupe $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$, avec $\mathscr{X}$ une sphère $\mathbb{S}^n$ de dimension $n \geqslant 2$ (p_0 peut être quelconque). Vu le lemme 1, on se borne sans perte de généralité aux lacets différentiables par morceaux $u: I \to \mathbb{S}^n$. Mais aux termes d'un corollaire du théorème de Sard (voir leçon III.15, corollaire du théorème 1) chaque lacet u n'est manifestement une surjection pour aucun $n \geqslant 2$, i.e. on trouve un point $q_0 \in \mathbb{S}^n$ pour lequel u est en réalité un lacet dans $\mathbb{S}^n \setminus \{q_0\}$ (c'est le composé d'un lacet dans $\mathbb{S}^n \setminus \{q_0\}$ et de l'injection $\mathbb{S}^n \setminus \{q_0\} \to \mathbb{S}^n$). Puisque le sous-espace $\mathbb{S}^n \setminus \{q_0\}$ est contractile (il est homéomorphe à $\mathring{B}^n$), il s'ensuit que u est homotope au lacet constant e_{p_0} (dans $\mathbb{S}^n \setminus \{q_0\}$ et *a fortiori* dans $\mathbb{S}^n$). Aussi,

$$\pi_1(\mathbb{S}^n, p_0) = 1, \quad n \geqslant 2,$$

i.e. *la sphère $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe pour $n \geqslant 2$.*

* * *

Lorsque $n = 1$, le théorème de Sard ne garantit que l'existence d'un point $q_0 \in S^1$, valeur régulière de tous les chemins différentiables $u_i : [a_i, b_i] \to S^1$, composantes de u différentiable par morceaux. Il y a intérêt à étudier au préalable certains chemins spéciaux sur la circonférence S^1.

Deux points distincts quelconques p, q de S^1 la partagent en deux arcs $C^{(+)}(p, q)$ et $C^{(-)}(p, q)$ (on passe de p à q si l'on parcourt le premier dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et le second dans le sens contraire). On pose pour $p = q$

$$C^{(+)}(p, p) = C^{(-)}(p, p) = S^1 \setminus \{p\}.$$

On note que $C^{(+)}(q, p) = C^{(-)}(p, q)$ et $C^{(-)}(q, p) = C^{(+)}(p, q)$ quels que soient p, $q \in S^1$.

On introduit sur $C^{(+)}(p, q)$ le paramètre angulaire $\theta^{(+)}$ compté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (qui est 0 en p et $\theta_0^{(+)} > 0$ en q, $\theta_0^{(+)}$ étant la mesure en radians de l'arc considéré). Pareillement, on paramètre $C^{(-)}(p, q)$ par $\theta^{(-)}$ compté dans le sens contraire, qui est 0 en p et $\theta_0^{(-)}$ en q, $\theta_0^{(-)}$ étant la mesure en radians de $C^{(-)}(p, q)$. (Ainsi, $\theta_0^{(-)} = 2\pi - \theta_0^{(+)}$ si $p \neq q$, et $\theta_0^{(-)} = \theta_0^{(+)} = 2\pi$ pour $p = q$).

Les applications identiques $[0, \theta_0^{(+)}] \to [0, \theta_0^{(+)}]$ et $[0, \theta_0^{(-)}] \to [0, \theta_0^{(-)}]$ définissent sur la circonférence les chemins généralisés qui joignent p à q. Ces chemins sont notés $v^{(+)}(p, q)$ et $v^{(-)}(p, q)$ respectivement.

On note que si $p = q$, il s'agit des lacets réciproquement inverses :

$$v^{(-)}(p, p) = v^{(+)}(p, p)^{-1}.$$

(En général, $v^{(-)}(q, p) = v^{(+)}(p, q)^{-1}$ et $v^{(+)}(q, p) = v^{(-)}(p, q)^{-1}$ quels que soient p, $q \in S^1$.)

Un chemin généralisé $v : [a, b] \to S^1$ qui joint p à q (le cas $p = q$ y compris) est dit *spécial* si $v(t) = p$ a lieu pour $t = a$ seulement et si $v(t) = q$ n'est vérifiée que pour $t = b$. La propriété de connexité entraîne que ou bien $v^{(+)}(t) \in C^{(+)}(p, q)$ pour ce chemin et pour $t \in]a, b[$ quelconque, ou bien $v^{(-)}(t) \in C^{(-)}(p, q)$. Le chemin v est défini dans les deux cas par une fonction continue

$$\bar{v} : [a, b] \to [0, \theta_0], \quad \text{avec} \quad \theta_0 = \theta_0^{(+)}, \theta_0^{(-)},$$

où $\bar{v}(a) = 0$, et $\bar{v}(b) = \theta_0$ ou $\bar{v}(b) = 0$ (la dernière égalité n'est possible que si $p = q$, i.e. si $\theta_0 = 2\pi$).

Lorsque $\bar{v}(b) = \theta_0$, la fonction $\bar{v}$ est le changement de paramètre de $v^{(+)}(p, q)$ (pour $\theta_0 = \theta_0^{(+)}$) ou de $v^{(-)}(p, q)$ (pour $\theta_0 = \theta_0^{(-)}$) relativement à v. Ainsi, dans l'espace $\mathcal{P}(p, S^1, q)$ des

chemins sur la circonférence S^1 qui joignent p à q, chaque chemin spécial v, $\bar{v}(b) = \theta_0$, détermine la même classe d'homotopie que $v^{(+)}(p, q)$ ou $v^{(-)}(p, q)$ respectivement.

Si $\bar{v}(b) = 0$, la formule

$$f(t, \tau) = (1 - \tau)\,\bar{v}(t), \quad t \in [a, b], \quad \tau \in I,$$

définit évidemment l'homotopie reliant v au chemin constant en p, et le chemin spécial v est donc homotope à un chemin constant.

Revenons au lacet différentiable par morceaux $u: I \to S^1$ en p_0 de la circonférence S^1 qui est composé de chemins généralisés différentiables $u_i: [a_i, b_i] \to S^1$. Si q_0 est une valeur régulière de toutes les applications u_i, l'image réciproque $u_i^{-1}(q_0)$ est pour chaque i une sous-variété 0-dimensionnelle du segment $[a_i, b_i]$, i.e. une famille finie de points. Ces points partagent $[a_i, b_i]$ en des segments partiels sur chacun desquels u_i est un chemin spécial. Ainsi, *tout lacet différentiable par morceaux u peut être composé de chemins spéciaux*, si bien qu'il est homotope, par suite des résultats obtenus, à un lacet constant ou à un lacet de composantes $v^{(+)}(p, q)$ et $v^{(-)}(p, q)$.

Si p, q, r de S^1 sont tels que lorsqu'on parcourt la circonférence à partir de p dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, on passe d'abord par q, le chemin $v^{(-)}(q, r)$ est évidemment composé de $v^{(-)}(q, p)$ et $v^{(-)}(p, r)$:

$$v^{(-)}(q, r) = v^{(-)}(q, p) * v^{(-)}(p, r).$$

Mais si l'on passe en premier par r,

$$v^{(+)}(p, q) = v^{(+)}(p, r) * v^{(+)}(r, q).$$

Aussi,

$$v^{(+)}(p, q) * v^{(-)}(q, r) = v^{(+)}(p, q) * v^{(-)}(p, q) * v^{(-)}(p, r)$$

dans le premier cas, et

$$v^{(+)}(p, q) * v^{(-)}(q, r) = v^{(+)}(p, r) * v^{(+)}(r, q) * v^{(-)}(q, r)$$

dans le second. Chaque chemin $v^{(+)}(p, q) * v^{(-)}(q, r)$ étant manifestement symétrique est homotope à un chemin constant. Aussi, chaque lacet composé de $v^{(+)}(p, q)$, $v^{(-)}(p, q)$, dont la première composante est $v^{(+)}(p_0, q)$ (resp. $v^{(-)}(p_0, q)$), est homotope à un lacet de seules composantes $v^{(+)}(p, q)$ (resp. $v^{(-)}(p, q)$).

Il est d'ailleurs clair que chaque lacet en p_0 composé de chemins $v^{(+)}(p, q)$ est combinaison des lacets $v^{(+)}(p_0, p_0)$ (i.e. il parcourt plusieurs fois de façon uniforme la circonférence S^1 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) et que chaque lacet composé de chemins $v^{(-)}(p, q)$ est combinaison des lacets $v^{(-)}(p_0, p_0) = v^{(+)}(p_0, p_0)^{-1}$ (i.e. il fait de façon uniforme plusieurs tours de S^1 dans le sens des aiguilles d'une montre).

Ainsi, *la classe d'homotopie* $[u]$ *du lacet* u *est égale à* ι^n, avec ι la classe d'homotopie du lacet $v^{(+)}(p_0, p_0)$ (qui parcourt uniformément une seule fois S^1 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) obtenu par un changement de paramètre relativement au segment unité, et n un entier strictement positif, négatif ou nul selon que le lacet u est homotope à un lacet composé de $v^{(+)}(p_0, p_0)$, à un lacet composé de $v^{(-)}(p_0, p_0)$ ou à un lacet constant. Autrement dit, *le groupe* $\pi_1(S^1, p_0)$ *est un groupe cyclique engendré par* ι.

Mais quel est l'ordre de ce groupe? Aussi, nous allons décrire un procédé de calcul de $\pi_1(S^1, p_0)$ qui répond à cette question. Soit

$$\pi: \mathbb{R} \to S^1, \quad t \mapsto e^{2\pi i t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

le revêtement de l'exemple 1, leçon 2, et soit p_0 le point 1 de la circonférence S^1.

On considère, pour tout lacet u en p_0 de S^1, le chemin de revêtement $w = s(0, u)$ d'origine $0 \in \mathbb{R}$, s étant une connexion de π. L'extrémité $w(1)$ de w se projette en l'extrémité p_0 du lacet u, i.e. c'est un entier. D'autre part, on voit sans peine (le démontrer!) que ce nombre dépend continûment du lacet u, i.e. $w(1)$ varie de façon continue pour toute homotopie de celui-ci. Aussi, il ne change pas parce qu'entier. Cela veut dire que $[u] \mapsto w(1)$ définit parfaitement une application

$$\text{(6)} \qquad \deg: \pi_1(S^1, p_0) \to \mathbb{Z}.$$

Il se trouve que (6) *est un homomorphisme*. En effet, soit $[u]$, $[v] \in \pi_1(S^1, p_0)$, et soit $\deg[u] = n$ et $\deg[v] = m$, i.e. on suppose que le chemin $s(0, u)$ de $\mathbb{R}$ joint le point 0 au point n et le chemin $s(0, v)$ relie 0 à m. Dans ce cas, le chemin w de $\mathbb{R}$ défini par

$$w(t) = s(0, v)(t) + n, \quad t \in I,$$

part de n et recouvre le chemin v (i.e. c'est $s(n, v)$). Aussi, le chemin $s(0, u)\, w$ d'origine 0 recouvre uv, i.e. son extrémité $(s(0, u)\, w)(1) = \deg([u]\cdot[v])$. Or, $(s(0, u)\, w)(1)$ est par définition l'extrémité $w(1)$ de w, i.e. le point $m + n = \deg[u] + \deg[v]$. Par conséquent,

$$\deg([u]\cdot[v]) = \deg[u] + \deg[v]. \quad \square$$

On établit ensuite que *l'homomorphisme* (6) *est un épimorphisme*. En effet, quel que soit le chemin $w: I \to \mathbb{R}$ joignant 0 à $n \in \mathbb{Z}$, le chemin $u = \pi \circ w$ est un lacet sur S^1 et son revêtement $s(0, u)$ coïncide, par suite de l'unicité, avec w. Aussi, $s(0, u)(1) = w(1) = n$, i.e. $\deg[u] = n$. $\square$

Enfin, *l'homomorphisme* (6) *est un monomorphisme*. En effet, $\deg[u] = 0$ signifie que le revêtement $s(0, u)$ est un lacet en 0. Or, la droite $\mathbb{R}$ étant homéomorphe à l'intervalle $\mathring{B}^1$ est contractile, donc simplement connexe. Il existe donc dans $\mathbb{R}$ une homotopie f

qui relie $s(0, u)$ au lacet constant e_0 en 0, auquel cas l'application composée $\pi \circ f$ représente évidemment une homotopie reliant le lacet $u = \pi \circ s(0, u)$ au lacet constant e_{p_0} en p_0. Aussi, $[u] = e$ dans le groupe $\pi_1(S^1, p_0)$. □

Ainsi, *l'application* (6) *est un isomorphisme*, si bien que *le groupe* $\pi_1(S^1, p_0)$ *est un groupe cyclique infini.*

On a manifestement $\deg \iota = 1$, et le groupe $\pi_1(S^1, p_0)$ a pour générateur la classe d'homotopie.

On voit combien la méthode des revêtements l'emporte sur le procédé géométrique élémentaire qui l'a précédée.

Dans la leçon suivante, nous la généraliserons aux revêtements quelconques, ce qui nous donnera une méthode générale pour calculer les groupes fondamentaux des espaces.

LEÇON 4

Le groupe fondamental ne dépend pas du choix de l'origine. — Homomorphisme de groupes fondamentaux induit par une application continue. — Suite exacte d'homotopie d'un revêtement. — Propriétés des suites exactes d'homotopie des revêtements. — Revêtements simplement connexes. — Existence et unicité des relèvements. — Espaces commodes.

Quels que soient les points p_0, p_1 d'un espace topologique $\mathscr{X}$, chaque chemin a allant de p_0 à p_1 permet d'associer à un lacet u quelconque en p_1 de $\mathscr{X}$ le lacet v en p_0 obtenu à partir du lacet généralisé $a * u * a^{-1}$ par un changement de paramètre. Les propriétés de la multiplication des classes d'homotopie des chemins (voir proposition 2 de la leçon 3) entraînent que *la formule*

$$\varphi_a [u] = [v]$$

définit bien l'isomorphisme

$$\varphi_a : \pi_1 (\mathscr{X}, p_1) \to \pi_1 (\mathscr{X}, p_0)$$

qui dépend seulement de la classe d'homotopie $[a]$ *du chemin* a.

On note que si les chemins a et b joignant p_0 à p_1 ne sont pas homotopes, les isomorphismes φ_a et φ_b sont distincts en général.

On voit par exemple que si $p_1 = p_0$ (le chemin a est donc un lacet en p_0), alors *l'isomorphisme* φ_a *n'est autre que l'automorphisme intérieur du groupe* $\pi_1 (\mathscr{X}, p_0)$ *induit par l'élément* $\alpha = [a]$. Aussi, $\varphi_a \neq \mathrm{id}$ si α n'est pas un élément du centre de $\pi_1 (\mathscr{X}, p_0)$.

Quoi qu'il en soit, *le groupe* $\pi_1 (\mathscr{X}, p_0)$, *avec* $\mathscr{X}$ *connexe par arcs, est indépendant à un isomorphisme près du point* p_0.

En particulier, si $\pi_1 (\mathscr{X}, p_0) = 1$ pour un $p_0 \in \mathscr{X}$, alors $\pi_1 (\mathscr{X}, p_1) = 1$ pour tout $p_1 \in \mathscr{X}$.

* * *

L'application continue arbitraire

$$h : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$$

définit par

$$u \mapsto h \circ u, \quad u : I \to \mathscr{X},$$

l'application continue (démontrer la continuité !)

$$h \circ : \mathscr{P} (\mathscr{X}) \to \mathscr{P} (\mathscr{Y})$$

d'espaces des chemins qui transforme chaque sous-espace $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$ en le sous-espace $\mathcal{P}(q_0, \mathcal{Y}, q_1)$, où $q_0 = h(p_0)$, $q_1 = h(p_1)$. Elle induit donc une application h_* de l'ensemble des composantes connexes par arcs de $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$ dans son homologue pour $\mathcal{P}(q_0, \mathcal{Y}, q_1)$. Autrement dit, la formule

$$(1) \qquad h_*[u] = [h \circ u], \quad u : I \to \mathcal{X},$$

définit parfaitement l'application h_* de l'ensemble des classes d'homotopie des chemins de $\mathcal{X}$ qui joignent p_0 à p_1 dans l'ensemble des classes d'homotopie des chemins de $\mathcal{Y}$ qui vont de q_0 à q_1. [On établit que (1) est licite sans démontrer la continuité de $h\circ$, savoir on remarque tout simplement que quelle que soit l'homotopie $f: I^2 \to \mathcal{X}$ reliant les chemins u et v de $\mathcal{P}(p_0, \mathcal{X}, p_1)$, l'application $h \circ f: I^2 \to \mathcal{Y}$ constitue une homotopie de $h \circ u$ à $h \circ v$ dans $\mathcal{P}(q_0, \mathcal{Y}, q_1)$.]

On a en particulier pour $p_1 = p_0$:

$$(2) \qquad h_* : \pi_1(\mathcal{X}, p_0) \to \pi_1(\mathcal{Y}, q_0), \quad q = h(p_0).$$

La définition du produit des chemins implique que si $w = uv$, alors $h \circ w = (h \circ u)(h \circ v)$. Aussi

$$h_*([u] \cdot [v]) = h_*([u]) \cdot h_*([v]),$$

i.e. h_* est un homomorphisme de groupoïdes pour la multiplication des classes d'homotopie des chemins. En particulier, *l'application* (2) *est un homomorphisme de groupes pour toute application continue* $h: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

On dit de celui-ci qu'il est *induit* par l'application continue h. La notation $(h_*)_{p_0}$ spécifie la dépendance de cet homomorphisme vis-à-vis du point p_0.

Comme $(g \circ h) \circ u = g \circ (h \circ u)$ pour n'importe quelles applications

$$h: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \quad g: \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$$

et tout chemin $u: I \to \mathcal{X}$, on a

$$(3) \qquad (g \circ h)_* = g_* \circ h_*.$$

Si $h = \mathrm{id}$, on a de plus $h_* = \mathrm{id}$. [En termes de catégories, ces propriétés signifient que la correspondance

espace avec point-base
⇓
groupe fondamental

est un *foncteur*.

Une comparaison directe des définitions montre qu'*on a pour tout chemin a de $\mathcal{X}$ qui joint le point p_0 au point p_1 le diagramme com-*

mutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathscr{X}, p_1) & \xrightarrow{\varphi_a} & \pi_1(\mathscr{X}, p_0) \\ {\scriptstyle (h_*)_{p_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (h_*)_{p_0}} \\ \pi_1(\mathscr{Y}, q_1) & \xrightarrow{\varphi_{h_* a}} & \pi_1(\mathscr{Y}, q_0), \end{array} \quad q_0 = h(p_0), \quad q_1 = h(p_1).$$

[En termes de catégories, cela équivaut à dire que la correspondance $a \mapsto \varphi_a$ jouit de la *propriété de naturalité.*]

* * *

Voyons quels liens existent entre les groupes fondamentaux et les revêtements.

Soit $\mathscr{X}$ un espace topologique quelconque de point-base p_0. Nous désignons par $\Omega(\mathscr{X}, p_0)$ (ou $\Omega\mathscr{X}$ tout court) l'espace $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{X}, p_0)$ de tous les lacets en p_0 qui est muni de la topologie compacte-ouverte. On sait depuis la leçon 3 que les éléments du groupe $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ (classes d'homotopie des lacets) ne sont autres que les composantes connexes par arcs de $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{X}, p_0)$. Il y a des fois intérêt à faire la distinction entre ces composantes considérées comme éléments de $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ et ces mêmes composantes considérées comme sous-espaces de $\Omega\mathscr{X}$. Cela nous autorise à noter $\Omega_\alpha\mathscr{X}$ la composante connexe par arcs $\alpha \in \pi_1(\mathscr{X}, p_0)$ de l'espace $\Omega\mathscr{X}$. En particulier, $\Omega_e\mathscr{X}$ est la composante de $\Omega\mathscr{X}$ formée des lacets homotopes au lacet constant e_{p_0}. (e est comme toujours l'unité du groupe $\pi_1(\mathscr{X}, p_0)$.)

Soient $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ une fibration au sens de Hurewicz quelconque, et s: Cocyl $\pi \to \mathscr{P}(\mathscr{E})$ une connexion arbitraire de π. Soient ensuite $p_0 \in \mathscr{E}$, $b_0 = \pi(p_0) \in \mathscr{B}$, et $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_{b_0}$ la fibre de π au-dessus du point b_0. (On note que $p_0 \in \mathscr{F}_0$.) Comme le chemin $s(p_0, u)$ est pour tout $u \in \Omega(\mathscr{B}, b_0)$ un chemin d'origine p_0 de $\mathscr{E}$ qui se projette en u, son extrémité $s(p_0, u)(1)$ appartient à $\mathscr{F}_0$. Ainsi, la formule

$$s_1(u) = s(p_0, u)(1), \quad u \in \Omega\mathscr{B},$$

définit l'application (évidemment continue)

$$s_1 : \Omega\mathscr{B} \to \mathscr{F}_0.$$

Si $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ est un revêtement, si bien que l'espace $\mathscr{F}_0$ est discret, l'application s_1 étant continue est telle que le point $s_1(u)$ dépend pour tout lacet $u \in \Omega\mathscr{B}$ seulement de la composante $\Omega_\alpha\mathscr{X}$ contenant u, i.e. de la classe d'homotopie $\alpha = [u]$ de u. Cela signifie que

$$\sigma(\alpha) = s_1(u), \quad \alpha \in \pi_1(\mathscr{B}, b_0),$$

avec u un lacet quelconque de la classe α, définit bien une application

(4) $$\sigma: \pi_1(\mathscr{B}, b_0) \to \mathscr{F}_0.$$

On remarque que si l'espace $\mathscr{B}$ est séparé, l'application (4) ainsi définie l'est *de façon unique.*

Si $\mathscr{B}$ séparé est localement connexe par arcs, il en est de même de l'espace $\mathscr{E}$, si bien qu'il est connexe par arcs (ainsi que $\mathscr{B}$) (voir leçon III.11). Aussi, il existe dans $\mathscr{E}$, pour tout point $p \in \mathscr{F}_0$, un chemin v allant de p_0 à p. La projection $u = \pi \circ v$ de v est un lacet en p_0 dont le chemin de revêtement $s(p_0, u)$ se confond, par suite de la propriété d'unicité, avec v. Aussi, $s_1(u) = p$, i.e. $\sigma(\alpha) = p$, où $\alpha = [u]$. Cela prouve que *si l'espace $\mathscr{B}$ est séparé et localement connexe par arcs, l'application σ est une surjection pour tout revêtement* $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$. Nous avons démontré chemin faisant que *chaque $v \in \in \mathscr{P}(p_0, \mathscr{E})$ vérifie l'égalité*

(5) $$v = s(p_0, u), \quad \textit{où} \quad u = \pi \circ v.$$

[Cette égalité est juste sous la condition suffisante de $\mathscr{B}$ séparé.]

La fibre $\mathscr{F}_0$ est un ensemble à élément distingué p_0. Le *noyau* $\operatorname{Ker} \sigma = \sigma^{-1}(p_0)$ de l'application σ a donc un sens. Il est formé par définition des classes d'homotopie $\alpha = [u]$ des lacets $u \in \Omega\mathscr{B}$ pour lesquels le chemin $s(p_0, u)$ est un lacet. Par suite de l'égalité (5), ce sont précisément les lacets u projections $\pi \circ v$ des lacets $v \in \Omega\mathscr{E}$, et on a donc $\operatorname{Ker} \sigma = \operatorname{Im} \pi_*$, où

(6) $$\pi_*: \pi_1(\mathscr{E}, p_0) \to \pi_1(\mathscr{B}, b_0)$$

est un homomorphisme de groupes fondamentaux induit par le revêtement π.

D'autre part, on constate facilement que *l'homomorphisme* (6) *est un monomorphisme* (et, partant, un isomorphisme du groupe $\pi_1(\mathscr{E}, p_0)$ sur le noyau $\operatorname{Ker} \sigma = \operatorname{Im} \pi_*$ de l'application σ). En effet, $\pi_*[v] = 0$ signifie pour un lacet $v \in \Omega\mathscr{E}$ qu'il existe dans l'espace $\Omega\mathscr{B}$ un chemin $\tau \mapsto u_\tau$ qui joint le lacet constant e_{p_0} au lacet $u = \pi \circ v$. Quel que soit $\tau \in I$, le chemin $v_\tau = s(p_0, u_\tau)$ de $\mathscr{E}$ va donc de p_0 à $s_1(u_\tau)$, et l'application $\tau \mapsto v_\tau$ de I dans l'espace $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{E})$ est continue (le démontrer!), i.e. c'est un chemin de $\mathscr{P}(p_0, \mathscr{E})$ qui joint le chemin $s(p_0, e_{p_0}) = e_{p_0}$ au chemin $s(p_0, u) = v$. Dans ce cas, le point $s_1(u_\tau) = v_\tau(1)$ dépend lui aussi continûment de τ. Ce point étant dans l'espace discret $\mathscr{F}_0$ est donc le même pour chaque τ. Autrement dit, $s_1(u_\tau) = s_1(u_0) = p_0$, i.e. tous les chemins v_τ sont autant de lacets en p_0. Aussi, $v \in \Omega_e\mathscr{E}$, i.e. $[v] = e$. □

[La dernière affirmation est juste sans que $\mathscr{B}$ soit assujetti à des conditions de caractère topologique général.]

La suite

(7) $$\ldots \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to \ldots$$

de groupes et de leurs homomorphismes (ou, de façon plus générale, d'ensembles avec points-bases et d'applications qui envoient des points-bases en des points-bases) est dite *exacte en* B si $\operatorname{Im} \alpha =$ $= \operatorname{Ker} \beta$. La suite (7) est *exacte* si elle est exacte en chacun de ses termes.

On utilise ce vocabulaire pour résumer toutes les affirmations ci-dessus, savoir on a la

Proposition 1. *Pour tout revêtement* $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ *de l'espace séparé connexe et localement connexe par arcs* $\mathscr{B}$, *il existe la suite exacte*

(8) $$\{e\} \to \pi_1(\mathscr{E}, p_0) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(\mathscr{B}, b_0) \xrightarrow{\sigma} \mathscr{F}_0 \to pt$$

avec pt un ensemble réduit à un point.

L'exactitude de (8) en $\pi_1(\mathscr{E}, p_0)$ signifie que l'homomorphisme π_* est un monomorphisme, celle en $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ équivaut à la validité de l'égalité $\operatorname{Ker} \sigma = \operatorname{Im} \pi_*$, et celle en $\mathscr{F}_0$ veut dire que σ est une surjection.

Définition 1. La suite (8) est la *suite exacte d'homotopie* du revêtement $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$.

* * *

On peut compléter la proposition 1, savoir on voit sans peine que *dans la suite* (8), *l'image réciproque* $\sigma^{-1}(p)$ *par* σ *d'un point* $p \in \mathscr{F}_0$ *quelconque est une classe à gauche du groupe* $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ *suivant le sous-groupe* $\operatorname{Im} \pi_*$ (i.e. $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ a lieu pour $\alpha, \beta \in \pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ si et seulement si $\alpha\beta^{-1} \in \operatorname{Im} \pi_*$). En effet, l'unicité du chemin de revêtement entraîne de suite

(9) $$\begin{aligned} s(p_0, u)^{-1} &= s(p_1, u^{-1}), \\ s(p_0, uv) &= s(p_0, u)\, s(p_1, v) \end{aligned}$$

pour n'importe quels chemins $u \in \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$ et $v \in \mathscr{P}(b_1, \mathscr{B})$, où $p_1 = s_1(u) = s(p_0, u)$ (1). Si les lacets $u, v \in \Omega\mathscr{B}$ satisfont à $\sigma[u] = \sigma[v]$ (i.e. à $s_1(u) = s_1(v)$), alors

$$s(p_0, u)\, s(p_0, v)^{-1} = s(p_0, uv^{-1}),$$

donc

$$uv^{-1} = (\pi \circ s)(p_0, uv^{-1}) \in \pi \circ (\Omega\mathscr{E}).$$

Ainsi, $[u] \cdot [v]^{-1} = [uv^{-1}] \in \operatorname{Im} \pi_*$.

Inversement, si $[u] \cdot [v]^{-1} \in \operatorname{Im} \pi_*$, alors $uv^{-1} = \pi \circ w$, où $w \in$ $\in \Omega\mathscr{E}$ et, partant,

$$s(p_0, u)\, s(p_0, v)^{-1} = s(p_0, \pi \circ w) = w.$$

Aussi,

$$s_1(u) = s(p_0, u)(1) = (w \cdot s(p_0, u))(1) = s(p_0, v)(1) = s_1(v);$$

d'où $\sigma[u] = \sigma[v]$. □

Quel que soit l'homomorphisme de groupes $\varphi: A \to B$, l'ensemble $B/\mathrm{Im}\, A$ des classes du groupe B suivant le sous-groupe $\mathrm{Im}\, A$ s'appelle *conoyau* de φ (on le note $\mathrm{Coker}\, \varphi$). Si l'on traduit l'affirmation démontrée en termes de conoyaux, on dit que *quel que soit le revêtement* $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ *de l'espace séparé connexe et localement connexe par arcs* $\mathcal{B}$, *l'application* σ *induit la bijection*

(10) $$\mathrm{Coker}\, \pi_* \to \mathcal{F}_0.$$

On interprète la situation autrement si l'on introduit l'application

$$\bar{\sigma}: \mathcal{F}_0 \times \pi_1(\mathcal{B}, b_0) \to \mathcal{F}$$

définie par

$$\bar{\sigma}(p_0, \alpha) = \sigma_{p_0}(\alpha), \quad p_0 \in \mathcal{F}_0, \quad \alpha \in \pi_1(\mathcal{B}, b_0),$$

où σ_{p_0} est σ associée au point p_0.

Les formules (9) entraînent immédiatement que *l'application* $\bar{\sigma}$ *est l'action à droite du groupe* $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ *sur l'ensemble* $\mathcal{F}_0$, i.e. $\bar{\sigma}$ détermine une représentation

$$\pi_1(\mathcal{B}, b_0) \to \mathrm{Sym}\, \mathcal{F}_0$$

de $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ dans le groupe $\mathrm{Sym}\, \mathcal{F}_0$ de toutes les permutations de $\mathcal{F}_0$. Il s'agit de la *monodromie* du revêtement $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ dont l'image dans $\mathrm{Sym}\, \mathcal{F}_0$ s'appelle *groupe de monodromie* de π.

Quels que soient l'action (à droite) $\mathcal{F}_0 \times \Pi \to \mathcal{F}_0$ d'un groupe Π sur $\mathcal{F}_0$ et le point $p_0 \in \mathcal{F}_0$, l'ensemble Γ de tous les éléments $\alpha \in \Pi$ tels que $p_0\alpha = p_0$ constitue évidemment un sous-groupe de Π qu'on appelle *stabilisateur* de p_0. L'application $\alpha \mapsto p_0\alpha$ de Π sur l'orbite $p_0\Pi$ de p_0 induit (on le constate facilement) la bijection

$$\Pi/\Gamma \to p_0\Pi$$

de l'ensemble Π/Γ des classes à gauche de Π suivant le sous-groupe Γ sur l'orbite $p_0\Pi$. Si l'action est *transitive*, i.e. chaque élément de $\mathcal{F}$ a pour orbite cet ensemble tout entier, on a la bijection

(11) $$\Pi/\Gamma \to \mathcal{F}_0.$$

S'agissant de l'action $\bar{\sigma}$, $\alpha \mapsto p_0\alpha$ est précisément l'application $\sigma = \sigma_{p_0}$. Aussi, dire que σ est surjective, c'est dire que $\bar{\sigma}$ *est transitive*, et la justesse de l'égalité $\mathrm{Ker}\, \sigma = \mathrm{Im}\, \pi_*$ signifie que $\mathrm{Im}\, (\pi_*)_{p_0}$ *est le stabilisateur du point* p_0. Quant à la bijectivité de (10), cette propriété n'est donc qu'un cas particulier de celle de (11), ce qui nous dispense de la démontrer.

* * *

Définition 2. Un revêtement $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ est *simplement connexe* si l'espace $\mathscr{E}$ l'est.

L'espace $\mathscr{B}$ est dit *simplement recouvrable* s'il admet au moins un revêtement simplement connexe.

La proposition ci-dessous est un des principaux instruments pour calculer les groupes fondamentaux de tel ou tel espace. (Nous nous en sommes en fait servi dans la leçon 3 pour calculer le groupe $\pi_1 (S^1, p_0)$.)

Proposition 2. *Si l'espace séparé connexe et localement connexe par arcs $\mathscr{B}$ est simplement recouvrable, le groupe $\pi_1 (\mathscr{B}, b_0)$ est pour tout $b_0 \in \mathscr{B}$ en correspondance biunivoque avec la fibre $\mathscr{F}_0$ au-dessus du point b_0 d'une fibration simplement connexe quelconque*

$$\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}.$$

Cette correspondance dépend du choix de $p_0 \in \mathscr{F}_0$ et est définie par

$$[u] \mapsto s (p_0, u) (1), \quad u \in \Omega\mathscr{B}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de dire que si $\pi_1 (\mathscr{E}, p_0) = 1$, alors Coker $\pi_* = \pi_1 (\mathscr{B}, b_0)$. □

La proposition 2 passe sous silence la structure algébrique du groupe $\pi_1 (\mathscr{B}, b_0)$. On la complète donc par la

Proposition 3. *On suppose qu'il existe, pour l'espace séparé connexe et localement connexe par arcs $\mathscr{B}$, un espace connexe $\mathscr{E}$ et un groupe discret Γ qui opère discrètement à droite sur $\mathscr{E}$ tels que*

a) *$\mathscr{E}$ soit simplement connexe;*

b) *l'espace des orbites $\mathscr{E}/\Gamma$ soit homéomorphe à $\mathscr{B}$. Alors le groupe $\pi_1 (\mathscr{B}, b_0)$ est isomorphe à Γ.*

D é m o n s t r a t i o n. On identifie $\mathscr{B}$ et $\mathscr{E}/\Gamma$ et on considère la projection canonique

$$\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}, \quad p \mapsto p\Gamma.$$

Il est connu (voir exemple 5 de la leçon 2) que le triplet $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ est un revêtement (simplement connexe par suite de a) dont les fibres sont les orbites $p\Gamma$ de l'action de Γ sur $\mathscr{E}$. Selon la proposition 2, la formule

$$\sigma [u] = s (p_0, u) (1),$$

avec p_0 un point quelconque de l'orbite $b_0 \in \mathscr{B}$, définit donc la bijection

$$\sigma : \pi_1 (\mathscr{B}, b_0) \to p_0\Gamma$$

de $\pi_1 (\mathscr{B}, b_0)$ sur l'orbite $p_0\Gamma = b_0$. Toute action discrète étant libre, chaque point p de $p_0\Gamma$ admet une représentation unique $p_0\gamma$, $\gamma \in \Gamma$. Aussi, on pose $\tau (p) = \gamma^{-1}$ [$\gamma = \tau (p, p_0)$, τ étant une translation (avec les notations introduites dans la leçon 1)], et on a l'ap-

plication bijective

(12) $$d = \tau \circ \sigma : \pi_1 (\mathscr{B}, b_0) \to \Gamma.$$

On aura la proposition 3 si l'on montre que (12) est un homomorphisme de groupes (donc un isomorphisme puisque (12) est une bijection), i.e. que

$$d([u] \cdot [v]) = d([u]) \cdot d([v])$$

quels que soient les chemins $u, v \in \Omega \mathscr{B}$.

Soit $d[u] = \gamma^{-1}$ et $d[v] = \delta^{-1}$. Par définition

$$p_0\gamma = s(p_0, u)(1) \quad \text{et} \quad p_0\delta = s(p_0, v)(1).$$

Soit $p_0\gamma = p_1$ et $w = s(p_0, v)$. On définit le chemin $w\gamma$ de $\mathscr{E}$ par

$$(w\gamma)(t) = w(t)\gamma, \quad t \in I.$$

Il a pour origine le point $w(0)\gamma = p_0\gamma = p_1$ et recouvre le même lacet v que le chemin $w = s(p_0, v)$. Par conséquent, $w\gamma = s(p_1, v)$, donc

$$s(p_0, u) \cdot w\gamma = s(p_0, u) \cdot s(p_1, v) = s(p_0, uv)$$

(voir la seconde formule (9)). Ainsi,

$$\sigma([u] \cdot [v]) = \sigma[uv] = s(p_0, uv)(1) = (w\gamma)(1) =$$
$$= w(1)\gamma = (p_0\delta)\gamma = p_0(\delta\gamma),$$

si bien que

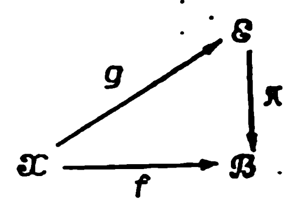
$$d([u] \cdot [v]) = (\delta\gamma)^{-1} = \gamma^{-1}\delta^{-1} = d[u] \cdot d[v]. \quad \square$$

(Cf. calcul du groupe $\pi_1(S^1, p_0)$ dans la leçon 3.)

* * *

Soit $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ une application quelconque.

Définition 3. On dit qu'une application continue $f : \mathscr{X} \to \mathscr{B}$ est *relevable* (pour π) s'il existe une application continue $g : \mathscr{X} \to \mathscr{E}$ telle que $\pi \circ g = f$, i.e. si le diagramme



est commutatif. L'application g est un *relèvement* de f.

Si $\mathscr{X} = I$, i.e. si f est un chemin de $\mathscr{B}$, le relèvement g n'est autre qu'un chemin de revêtement. Si $\mathscr{X} \subset \mathscr{B}$, les relèvements de l'inclusion $\mathscr{X} \to \mathscr{B}$ sont des sections de π sur $\mathscr{X}$.

D'autre part, si l'on considère π comme fibré (voir leçon 1), les relèvements de π sont exactement les morphismes sur $\mathscr{B}$ de f dans π.

Nous nous occuperons du cas où l'application $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ est un revêtement.

Problème 1. Démontrer que *si l'espace $\mathscr{X}$ est connexe, l'espace $\mathscr{B}$ est séparé et l'application $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ constitue un revêtement, alors il existe pour toute application $f: \mathscr{X} \to \mathscr{B}$ et n'importe quels points $x_0 \in \mathscr{X}$ et $p_0 \in \mathscr{E}$ tels que*

$$f(x_0) = \pi(p_0)$$

au plus une application $g: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$, relèvement de f, pour laquelle $g(x_0) = p_0$. (Théorème d'unicité du relèvement.)

[Ce théorème généralise le théorème d'unicité du chemin de revêtement (voir théorème 1 de la leçon 2), si bien que sa démonstration s'effectue de façon presque identique. Mais si $\mathscr{X}$ est supposé connexe par arcs et qu'on choisisse pour tout point $x \in \mathscr{X}$ un chemin u_x joignant x_0 à x, on indique que $g \circ u_x$ recouvre $f \circ u_x$, ce qui permet d'évoquer tout simplement le théorème d'unicité du chemin de revêtement.]

L'existence d'un relèvement est un problème sensiblement plus ardu et délicat.

On rappelle (voir exemple 7 de la leçon 2) que pour tout espace topologique $\mathscr{X}$ et son point x_0 quelconque, la formule

$$\rho(u) = u(1), \quad u \in \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}),$$

définit la fibration au sens de Hurewicz

$$\rho: \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}) \to \mathscr{X}.$$

Cette construction commute avec les applications continues (elle est naturelle si l'on se réfère à la théorie des catégories), i.e. on a pour toute application continue $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}) & \xrightarrow{\rho} & \mathscr{X} \\ {\scriptstyle f\circ}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathscr{P}(y_0, \mathscr{Y}) & \xrightarrow{\rho} & \mathscr{Y}, \end{array} \tag{13}$$

où $y_0 = f(x_0)$.

Comme $\rho(e_{x_0}) = x_0$, e_{x_0} étant traditionnellement le chemin constant en x_0, la fibration ρ induit l'application

$$\rho\circ: \mathscr{P}(e_{x_0}, \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})) \to \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}) \tag{14}$$

qui envoie chaque chemin $w: I \to \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})$ de l'espace $\mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})$ en le chemin $\rho \circ w: t \mapsto w(t)(1)$, $t \in I$, de $\mathscr{X}$.

Il ne faut pas confondre (14) avec

$$\rho: \mathcal{P}(e_{x_0}, \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})) \to \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$$

qui envoie le chemin $w: I \to \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$ en le chemin $w(1): \tau \mapsto w(1)\tau, \tau \in I$, de $\mathcal{X}$ et qui diffère en général de l'application (14).

Chose curieuse, *les applications* $\rho\circ$ *et* ρ *admettent une même section*, i.e. il existe une application

(15) $$\#: \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) \to \mathcal{P}(e_{x_0}, \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}))$$

telle qu'on ait pour tout chemin $u \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$

(16) $$\rho\circ u^{\#} = u \quad \text{et} \quad \rho(u^{\#}) = u, \quad \text{où} \quad u^{\#} = \#(u).$$

L'application (15) est définie par

$$u^{\#}(t)(\tau) = u(t\tau), \quad t, \tau \in I,$$

avec $u \in \mathcal{P}(x, \mathcal{X})$.

Lemme 1. *Soit* $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ *une fibration de Hurewicz arbitraire. Quels que soient l'application continue* $f: \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ *et le point* $x_0 \in \mathcal{X}$, *il existe une application* $h: \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) \to \mathcal{E}$ *qui clôt le diagramme commutatif*

(17) $$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) & \xrightarrow{h} & \mathcal{E} \\ \rho\downarrow & & \downarrow\pi \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{B}, \end{array}$$

i.e. telle que

$$f\circ\rho = \pi\circ h.$$

D é m o n s t r a t i o n. On choisit un point $p_0 \in \mathcal{E}$ qui vérifie $f(x_0) = \pi(p_0)$ et on pose, pour tout chemin $u \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$,

$$h(u) = s(p_0, f\circ u)(1),$$

où s: Cocyl $\pi \to \mathcal{P}(\mathcal{E})$ est une section quelconque de l'application $\pi_1: \mathcal{P}(\mathcal{E}) \to$ Cocyl π, $v \mapsto (v(0), \pi\circ v)$ (voir leçon 2).

Il vient

$$(\pi\circ h)(u) = \pi(s(p_0, f\circ u)(1)) = (f\circ u)(1) = \\ = f(u(1)) = (f\circ\rho)(u). \quad \square$$

La commutativité du diagramme (17) entraîne celle de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(e_{x_0}, \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})) & \xrightarrow{h\circ} & \mathcal{P}(p_0, \mathcal{E}) \\ \rho\circ\downarrow & & \downarrow\pi\circ \\ \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) & \xrightarrow{f\circ} & \mathcal{P}(b_0, \mathcal{B}). \end{array}$$

Aussi, la première égalité (16) implique la même propriété pour le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(e_{x_0}, \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})) & \xrightarrow{h} & \mathcal{P}(p_0, \mathcal{E}) \\ \# \uparrow & & \downarrow \pi_\circ \\ \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X}) & \xrightarrow{f_\circ} & \mathcal{P}(b_0, \mathcal{B}), \end{array}$$

i.e. on a pour tout lacet $u \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$:

(18) $$f \circ u = \pi \circ h \circ u^{\#}, \quad u^{\#} = \#(u).$$

Cette égalité est en particulier juste pour tout revêtement $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$.

Soient $u, v \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$ deux chemins de même extrémité, i.e.

$$\rho(u) = \rho(v).$$

Cela définit le chemin uv^{-1}, lacet en x_0 de $\mathcal{X}$. On suppose que l'espace de revêtement $\mathcal{E}$ contient un lacet w en p_0 tel que le lacet

$$f \circ (uv^{-1}) = (f \circ u)(f \circ v)^{-1}$$

de l'espace $\mathcal{B}$ soit homotope à $\pi \circ w$. Alors

(19) $$f \circ u \sim (\pi \circ w)(f \circ v),$$

donc (voir formule (18))

$$\pi \circ h \circ u^{\#} \sim (\pi \circ w)(\pi \circ h \circ v^{\#}),$$

i.e.

$$\pi \circ (h \circ u^{\#}) \sim \pi \circ (w \cdot (h \circ v^{\#})).$$

Puisque l'application

$$\pi_*: [u] \to [\pi \circ u]$$

est un monomorphisme pour tout revêtement $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ (on le sait déjà), il en résulte (voir le lacet $(h \circ u^{\#})(w \cdot (h \circ v^{\#}))^{-1}$)

$$h \circ u^{\#} \sim w \cdot (h \circ v^{\#}).$$

Mais les extrémités de deux chemins homotopes (ainsi que leurs origines, ce qui va de soi) coïncident en particulier. Aussi

$$\rho(h \circ u^{\#}) = \rho(w \cdot (h \circ v^{\#})) = \rho(h \circ v^{\#}),$$

d'où (en vertu de la commutativité du diagramme (13) pour h)

$$h(\rho(u^{\#})) = h(\rho(v^{\#})),$$

i.e. $h(u) = h(v)$ (voir la seconde égalité (16)).

Ainsi, on a le

Lemme 2. *Si l'application $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ du diagramme (17) est un revêtement et s'il existe pour les chemins $u, v \in \mathcal{P}(x_0, \mathcal{X})$ tels que*

$$\rho(u) = \rho(v),$$

un lacet $w \in \Omega\mathscr{E}$ *pour lequel on a l'homotopie* (19), *alors*

$$h(u) = h(v). \quad \square$$

On note que w existe manifestement si

$$\mathrm{Im}\, f_* \subset \mathrm{Im}\, \pi_* \tag{20}$$

pour les homomorphismes

$$f_*: \pi_1(\mathscr{X}, x_0) \to \pi_1(\mathscr{B}, b_0) \quad \text{et} \quad \pi_*: \pi_1(\mathscr{E}, p_0) \to \pi_1(\mathscr{B}, b_0)$$

de groupes fondamentaux, qui sont induits par les applications continues f et π.

On suppose l'espace $\mathscr{X}$ connexe par arcs. On choisit pour tout point $x \in \mathscr{X}$ un chemin u_x joignant x_0 à x et on définit l'application $g: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$ par

$$g(x) = h(u_x).$$

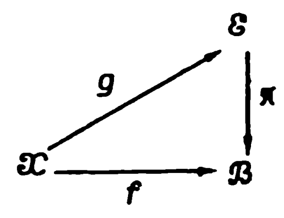
[Ainsi, on obtient g à la suite de plusieurs opérations: choisir pour tout $x \in \mathscr{X}$ un chemin u_x; considérer le chemin $f \circ u_x$; construire pour $f \circ u_x$ le chemin d'origine p_0 qui recouvre $s(p_0, f \circ u_x)$; en prendre l'extrémité $s(p_0, f \circ u_x)$ (1).]

D'après la remarque ci-dessus et le lemme 2, *si l'on a l'inclusion* (20), *la construction de g est intrinsèque* (le point $g(x)$ ne dépend pas du choix du chemin u_x).

On a $g(x_0) = p_0$, $h = g \circ \rho$ par construction, si bien que

$$\pi \circ g \circ \rho = \pi \circ h = f \circ \rho.$$

Il en résulte par suite de la surjectivité de ρ que $\pi \circ g = f$, i.e. le diagramme



est commutatif.

Mais cela ne prouve pas encore que g est un relèvement de f car g peut en général ne pas être continue. Si l'on veut établir les conditions de sa continuité (qui en font donc un relèvement de f), on doit se rappeler (voir leçon 1) qu'une application continue $\rho: \mathscr{P} \to \mathscr{X}$ est *épimorphe* si un ensemble $U \subset \mathscr{X}$ est ouvert sous la condition nécessaire et suffisante de $\rho^{-1}U$ ouvert dans $\mathscr{P}$.

Lemme 3. *On suppose que l'application h et l'application ρ du diagramme commutatif*

$$(21) \qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \xrightarrow{h} & \mathscr{E} \\ \rho \downarrow & \nearrow g & \\ \mathscr{X} & & \end{array}$$

sont continue et épimorphe respectivement. L'application g est continue.

Démonstration. La commutativité de (21) entraîne

$$\rho^{-1}(g^{-1}U) = h^{-1}U$$

pour tout ensemble $U \subset \mathscr{E}$. D'autre part, si U est ouvert, alors $h^{-1}U$ l'est également par suite de la continuité de h. Ainsi, quel que soit l'ouvert $U \subset \mathscr{E}$, l'ensemble $g^{-1}U$ est tel que $\rho^{-1}(g^{-1}U)$ soit ouvert. Aussi, $g^{-1}U$ est ouvert puisque ρ est épimorphe. Par conséquent, g est une application continue. □

Définition 4. Un espace topologique $\mathscr{X}$ est dit *commode* s'il est connexe par arcs et si l'application (évidemment surjective)

$$\rho: \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}) \to \mathscr{X}, \quad u \mapsto u(1), \quad u \in \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}),$$

est épimorphe pour tout point $x_0 \in \mathscr{X}$.

Aux termes du lemme 3, l'application g construite ci-dessus est continue pour $\mathscr{X}$ ainsi défini.

Nous avons donc démontré le

Théorème 1. *Soient $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ un revêtement quelconque, $\mathscr{X}$ un espace topologique commode, et*

$$f: \mathscr{X} \to \mathscr{B}$$

une application continue. S'il existe des points $x_0 \in \mathscr{X}$, $p_0 \in \mathscr{E}$ tels que $f(x_0) = \pi(p_0)$ et qu'on ait l'inclusion (20), *alors l'application f est relevable, et on trouve un relèvement*

$$g: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$$

de f pour lequel $g(x_0) = p_0$. Si $\mathscr{B}$ est séparé, le relèvement g est unique. □

On note que *la condition* (20) *est nécessaire pour l'existence du relèvement g.* En effet, si $f = \pi \circ g$, alors $f_* = \pi_* \circ g$, donc

$$\operatorname{Im} f_* = \pi_*(\operatorname{Im} g_*) \subset \operatorname{Im} \pi_*. \ \square$$

Problème 2. Montrer que si la condition (20) est remplie pour certains x_0 et p_0, alors il existe pour tout $x_0' \in \mathscr{X}$ un point $p_0' \in \mathscr{E}$, $f(x_0') = \pi(p_0')$, tel que cette condition soit vérifiée par x_0' et p_0', i.e.

$$\mathrm{Im}(f_*)_{x_0'} \subset \mathrm{Im}(\pi_*)_{p_0'}.$$

(On remarque qu'on ne saurait en général assimiler p_0' à tout point de l'espace $\mathscr{E}$ satisfaisant à $f(x_0') = \pi(p_0')$.)

Corollaire 1. *Quels que soient le revêtement $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ et l'espace commode simplement connexe $\mathscr{X}$, chaque application continue $f: \mathscr{X} \to \mathscr{B}$ est relevable. Pour tout point $x_0 \in \mathscr{X}$ et tout point $p_0 \in \mathscr{E}$ vérifiant la relation $f(x_0) = \pi(p_0)$, il existe un relèvement $g: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$ de l'application f, tel que $g(x_0) = p_0$. Si l'espace $\mathscr{B}$ est séparé, ce relèvement est unique.*

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de dire que si $\pi_1(\mathscr{X}, x_0) = 1$, la condition (20) est automatiquement vérifiée. □

Ce corollaire (et des fois le théorème 1) s'appelle *principe* (ou *théorème*) *de monodromie*. Il est à la base d'une infinité de théorèmes d'existence de la géométrie et de l'analyse. On verra dans la suite que la théorie des revêtements proprement dite s'en ressent beaucoup.

Les espaces $\mathscr{X}$ qui ne sont pas commodes n'obéissent pas en général au théorème de monodromie.

Exemple 1. Soit $\mathscr{B}$ une partie du plan $\mathbb{R}^2$ formée de la circonférence $x^2 + y^2 = 1$, de la demi-circonférence $(x - 2)^2 + y^2 = 1$,

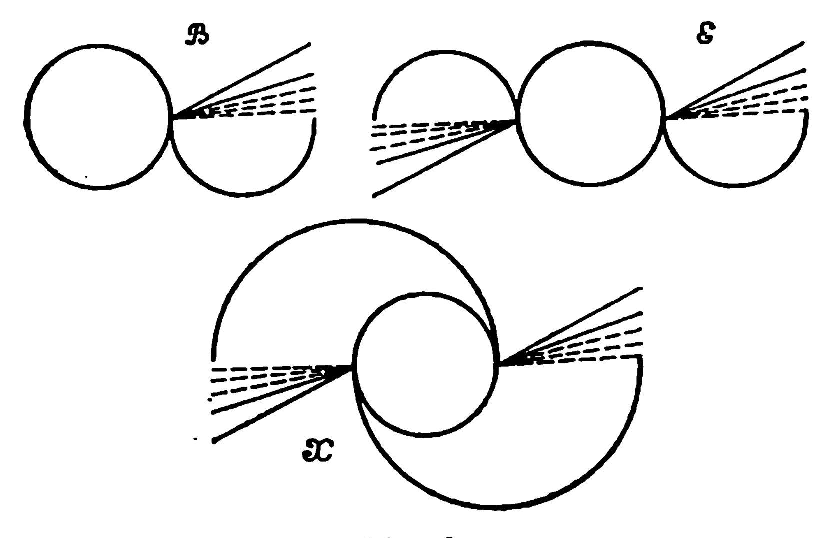


Fig. 2.

$y \leqslant 0$, et des segments qui relient le point $(1, 0)$ à tous les points $(3, 1/n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Soient ensuite $\mathscr{E}$ la réunion de $\mathscr{B}$ et de son symétrique par rapport au point $(0, 0)$, et $\mathscr{X}$ l'ensemble obtenu à partir de $\mathscr{E}$ si l'on substitue à $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, $y \leqslant 0$, et à la demi-circonférence symétrique la demi-circonférence $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, $y \leqslant 0$, et la demi-circonférence symétrique. Soient, enfin, $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ et $f: \mathscr{X} \to \mathscr{B}$ des applications qui font $x^2 + y^2 = 1$ s'enrouler deux fois sur elle-même (en laissant fixe le point $p_0 = (1, 0)$), appliquent isométriquement les segments sur les segments correspondants et appliquent homéomorphiquement les demi-

circonférences de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{X}$ sur la demi-circonférence de $\mathscr{B}$. On voit aisément (le démontrer!) que π et f sont des revêtements. Quant à l'application (unique!) $g: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$ telle que $\pi \circ g = f$ qui laisse fixe le point (1, 0), elle est l'identité sur la circonférence $x^2 + y^2 = 1$ et sur tous les segments, mais elle applique la demi-circonférence inférieure droite de $\mathscr{X}$ dans la demi-circonférence supérieure gauche de $\mathscr{E}$ (et la demi-circonférence supérieure gauche dans la demi-circonférence inférieure droite). En particulier, le point (3, 0) de $\mathscr{X}$ est envoyé en le point (—3, 0) de $\mathscr{E}$. Comme les extrémités des segments droits convergent dans $\mathscr{X}$ et dans $\mathscr{E}$ vers le même point (3, 0), cela signifie que l'application g subit une discontinuité en (3, 0). Par conséquent, f n'admet pas de relèvement continu g qui transforme le point (1, 0) en lui-même. Or, on établit sans peine que la condition (20) est remplie (le démontrer!).

Cet exemple est dû à Zeeman.

Problème 3. Montrer que l'injection de la circonférence induit pour $\mathscr{X}$, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ de l'exemple 1 un isomorphisme de groupes fondamentaux. Ainsi, le groupe fondamental de chacun de ces espaces est un groupe cyclique infini engendré par ι, classe d'homotopie du lacet qui fait un tour complet de la circonférence. Montrer que les deux homomorphismes de groupes fondamentaux $\pi_1(\mathscr{X}, p_0) \to \pi_1(\mathscr{B}, p_0)$ et $\pi_1(\mathscr{E}, p_0) \to \pi_1(\mathscr{B}, p_0)$ induits par les revêtements f et π opèrent par la formule $\iota^n \mapsto \iota^{2n}$.

* * *

On observe que l'espace $\mathscr{X}$ de l'exemple de Zeeman est non localement connexe par arcs. (Les points (3, 0) et (—3, 0) ont tous leurs voisinages suffisamment petits non connexes par arcs.) Il ne s'agit pas d'un fait fortuit.

Proposition 4. *Tout espace topologique $\mathscr{X}$ connexe et localement connexe par arcs est commode.*

D é m o n s t r a t i o n. On sait (leçon III.11) que $\mathscr{X}$ est connexe par arcs. La seule chose à démontrer est donc que $\rho: \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}) \to \mathscr{X}$ est un épimorphisme pour tout point $x_0 \in \mathscr{X}$. Mais nous irons plus loin, savoir nous montrerons que ρ *est ouverte* (voir problème 1 de la leçon 1).

Soit u_0 un chemin d'origine x_0 de $\mathscr{X}$, et soit W un voisinage quelconque de u_0 dans l'espace $\mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})$. Il faut démontrer que $\rho(u_0) = u_0(1)$ est un point intérieur de l'image ρW de W par ρ. Il est clair qu'il suffit de le faire pour les voisinages

$$W = \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}) \cap \langle K_1, U_1\rangle \cap \ldots \cap \langle K_n, U_n\rangle,$$

avec $K_1, \ldots, K_n$ des sous-ensembles compacts (=fermés) du segment I et $U_1, \ldots, U_n$ des ensembles ouverts de $\mathscr{X}$. (On rappelle que le symbole $\langle K, U\rangle$ désigne l'ensemble de tous les chemins $u: I \to \mathscr{X}$ pour lesquels $u(K) \subset U$.)

Nous ne nuirons aucunement à la généralité de l'exposé si nous supposons que $K_1, \ldots, K_n$ sont numérotés de façon qu'on ait pour certain m, $0 \leqslant m \leqslant n$,

$$1 \in K_1, \ldots, 1 \in K_m, \quad 1 \notin K_{m+1}, \ldots, 1 \notin K_n.$$

(L'égalité $m = 0$ signifie que $1 \notin K_i$ pour aucun i, et $m = n$ équivaut à $1 \in K_i$ pour tout i.) Dans ce cas, $u_0(1) \in U_1 \cap \ldots \cap U_m$, et il existe donc un voisinage connexe par arcs V de $\rho(u_0) = u_0(1)$ contenu dans $U_1 \cap \ldots \cap U_m$. (Si $m = 0$, V est un voisinage connexe par arcs quelconque de $\rho(u_0)$.) On choisit un nombre t_0, $0 < t_0 < 1$, tel que le segment $[t_0, 1]$ et les ensembles $K_{m+1}, \ldots, K_n$ soient disjoints et qu'on ait $u_0(t) \in V$ pour tout t, $t_0 \leqslant t \leqslant 1$. On constate immédiatement qu'on peut le faire.

On choisit pour tout point $x \in V$ le chemin v_x de V qui joint $u_0(1)$ à x, et soit $u_x \in \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X})$ le chemin défini par

$$u_x(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ v_x\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right) & \text{si } t_0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

On voit sans peine que $u_x \in W$, i.e. $u_x(t) \in U_i$ quand $t \in K_i$, $i = 1, \ldots, n$. (Si $i = 1, \ldots, m$ et $t \in K_i$, alors $u_x(t) = u(t) \in U_i$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, et $u_x(t) = v_x\left(\frac{t-t_0}{1-t_0}\right) \in V \subset U_i$, $t_0 \leqslant t \leqslant 1$. Dans les deux cas, $u_x(t)$ appartient donc à U_i. Mais si $i = m+1, \ldots, n$ et $t \in K_i$, on a nécessairement $0 \leqslant t \leqslant t_0$, donc $u_x(t) = u(t) \in U_i$.) Puisqu'on a évidemment $\rho(u_x) = x$, cela prouve l'inclusion $V \subset \rho W$, et $\rho(u_0)$ est bien un point intérieur de l'ensemble ρW. □

Ainsi, le principe de monodromie s'applique à tout espace $\mathscr{X}$ connexe et localement connexe par arcs.

Corollaire 2. *Quels que soient le sous-espace connexe, localement connexe par arcs et simplement connexe $\mathscr{X} \subset \mathscr{B}$ et les points $b_0 \in \mathscr{X}$, $p_0 \in \mathscr{E}$ tels que $\pi(p_0) = b_0$, tout revêtement $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ admet une section $s: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$ pour laquelle $s(b_0) = p_0$. Si l'espace $\mathscr{B}$ est séparé, la section s est unique.*

LEÇON 5

Espaces semi-localement simplement connexes.— Existence des revêtements simplement connexes.— Condition d'existence d'un isomorphisme entre deux revêtements.— Revêtements universels.— Un lemme auxiliaire.— Théorème de classification des revêtements. — Groupe des automorphismes d'un revêtement.— Revêtements réguliers.— Structure différentiable.

Le calcul du groupe fondamental d'un espace $\mathscr{B}$ donné par les propositions 2 et 3 de la leçon 4 suppose qu'on sait en construire les revêtements simplement connexes. Les méthodes employées s'appuient d'ordinaire sur telles propriétés concrètes de $\mathscr{B}$, mais si l'on veut en apprécier l'efficacité en théoricien, on doit disposer d'un procédé de construction assez général, fût-il inapplicable.

On indique en premier lieu une condition nécessaire simple imposée à $\mathscr{B}$ pour qu'il soit simplement recouvrable.

Définition 1. Un espace topologique $\mathscr{B}$ dont chaque point b_0 admet un système fondamental de voisinages simplement connexes (i.e. de voisinages connexes par arcs U tels que $\pi_1(U, b_0) = 1$) est dit *localement simplement connexe*. L'espace $\mathscr{B}$ est *semi-localement simplement connexe* si on le recouvre d'ensembles ouverts U ayant la propriété suivante : chaque lacet $u \in \Omega(U, b)$ est homotope dans $\mathscr{B}$ pour tout point $b \in U$ au lacet constant e_b (i.e. quelque soit $b \in U$, l'image de $\pi_1(U, b)$ dans $\pi_1(\mathscr{B}, b)$ par l'homomorphisme induit par l'injection $U \to \mathscr{B}$ est triviale ; nous dirons pour abréger que les ensembles U sont *simplement connexes dans* $\mathscr{B}$).

Il est clair que tout sous-ensemble de U, simplement connexe dans $\mathscr{B}$, l'est de même. Aussi, chaque point de $\mathscr{B}$ semi-localement simplement connexe admet un système fondamental de voisinages qui sont simplement connexes dans $\mathscr{B}$, et ces voisinages sont connexes par arcs si $\mathscr{B}$ l'est de plus localement.

Chaque espace localement simplement connexe est certes semi-localement simplement connexe. Comme la boule $\mathring{B}^n$ est simplement connexe (voir exemple 1 de la leçon 3), *toute variété est localement (donc semi-localement) simplement connexe.*

Proposition 1. *Tout espace $\mathscr{B}$ connexe, localement connexe par arcs et simplement recouvrable est semi-localement simplement connexe.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ un revêtement simplement connexe de l'espace $\mathscr{B}$, et U un sous-ensemble ouvert bien recouvert quelconque de $\mathscr{B}$. On aura évidemment le résultat désiré si l'on montre que chaque lacet $u \in \Omega(U, b)$ est homotope dans $\mathscr{B}$ pour tout $b_0 \in U$ au lacet constant e_{b_0}.

On choisit donc $p_0 \in \pi^{-1}(b_0)$ quelconque, et soit V un voisinage de p_0 qui recouvre bien U. L'application $\pi|_V : V \to U$ est par définition un homéomorphisme, si bien qu'on définit dans V le lacet

$$v = (\pi|_V)^{-1} \circ u.$$

L'espace $\mathscr{E}$ étant simplement connexe par définition, ce lacet est homotope dans $\mathscr{E}$ au lacet constant e_{p_0}. Aussi, $u = \pi \circ v$ est lui aussi homotope (dans $\mathscr{B}$) à un lacet constant. □

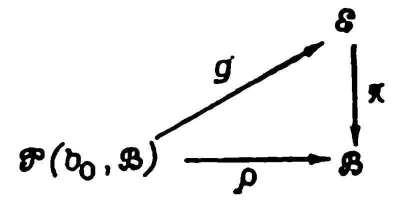
Exemple 1. L'espace $\mathscr{B}$, produit direct d'une famille dénombrable de circonférences S^1, n'est manifestement pas *semi-localement simplement connexe*, et il n'admet donc pas de revêtement simplement connexe.

* * *

Il se trouve que si $\mathscr{B}$ est séparé, cette condition nécessaire est également suffisante.

Théorème 1. *Tout espace séparé connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe $\mathscr{B}$ est simplement recouvrable.*

On suppose, pour avoir une idée plus nette de la démonstration, que le revêtement simplement connexe $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ existe. On choisit un point $b_0 \in \mathscr{B}$ et on applique le lemme 1 de la leçon 4 au revêtement $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ et à l'identité $f = \mathrm{id} : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$. Il vient l'application $g : \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B}) \to \mathscr{E}$, relèvement de $\rho : \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B}) \to \mathscr{B}$, i.e. telle que le diagramme



soit commutatif.

Problème 1. Démontrer que g est une surjection telle que les chemins $u, v \in \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$ vérifient l'égalité $g(u) = g(v)$ si et seulement si $u(1) = v(1)$ et le lacet uv^{-1} de $\mathscr{B}$ est homotope à un lacet constant. [*Indication.* Par définition, $g(u) = s(p_0, u)(1)$.]

La dernière affirmation signifie que $\mathscr{E}$ est, à topologie près, l'espace quotient de $\mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$ par la relation d'équivalence $\equiv$, où $u \equiv v$ sous la condition nécessaire et suffisante $u(1) = v(1)$ et $uv^{-1} \sim e_{b_0}$. Ce fait suggère de *définir* $\mathscr{E}$ comme ensemble quotient de $\mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$ par $\equiv$ muni d'une topologie adéquate. C'est ce qu'on va faire.

D é m o n s t r a t i o n du théorème 1. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des classes $\langle u \rangle$ des chemins $u \in \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$ par la relation d'équivalence

$\equiv$, et soit $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ une application définie (manifestement bien) par la formule

$$\pi \langle u \rangle = u (1).$$

Pour tout ouvert $U \subset \mathscr{B}$ et tout chemin $u: I \to \mathscr{B}$ joignant b_0 à un point de U, on note $\langle u, U \rangle$ l'ensemble de tous les points $\langle uv \rangle$ de $\mathscr{E}$, v étant un chemin quelconque d'origine $u(1)$ de U.

Ainsi, $\langle u' \rangle \in \langle u, U \rangle$ si et seulement si $u'(1) \in U$ et $u' \sim uv$, avec v un chemin de U qui joint $u(1)$ à $u'(1)$. Dans ce cas, si w est un chemin quelconque d'origine $u'(1)$ de U, alors

$$u'w \sim (uv)\, w \sim u\, (vw),$$

donc $\langle u'w \rangle \in \langle u, U \rangle$, i.e. $\langle u', U \rangle \subset \langle u, U \rangle$ et

$$\langle u', U \rangle = \langle u, U \rangle$$

par symétrie. (On rappelle que u' est un chemin arbitraire de $\mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$ tel que $\langle u' \rangle \in \langle u, U \rangle$.)

Comme $\langle u, U' \rangle \subset \langle u, U \rangle$ pour tout ouvert U' contenant $u(1)$, il en résulte l'inclusion

$$\langle u_0, U_1 \cap U_2 \rangle \subset \langle u_1, U_1 \rangle \cap \langle u_2, U_2 \rangle$$

quels que soient les ensembles $\langle u_1, U_1 \rangle$ et $\langle u_2, U_2 \rangle$ de la forme $\langle u, U \rangle$ dont l'intersection n'est pas vide, et le point $\langle u_0 \rangle \in \in \langle u_1, U_1 \rangle \cap \langle u_2, U_2 \rangle$. Aussi, on considère tous les ensembles $\langle u, U \rangle$ comme base d'une topologie sur $\mathscr{E}$. Muni de cette topologie, $\mathscr{E}$ est un espace topologique.

Si U est connexe par arcs, alors on a certes

$$\pi \langle u, U \rangle = U.$$

L'espace $\mathscr{B}$ étant localement connexe par arcs par hypothèse, cela prouve que *l'application* π *est continue et ouverte* (on note que $\pi \langle u \rangle \in U$ entraîne $\langle u \rangle \in \langle u, U \rangle$).

Il y a plus. Si $\langle u_1 \rangle, \langle u_2 \rangle \in \langle u, U \rangle$ et $\pi \langle u_1 \rangle = \pi \langle u_2 \rangle$, cela définit le lacet $u_1 u_2^{-1}$, et $u_1 \sim uv_1$, $u_2 \sim uv_2$, v_1 et v_2 étant des chemins de U, impliquent

$$u_1 u_2^{-1} \sim u\, (v_1 v_2^{-1})\, u^{-1},$$

avec $v_1 v_2^{-1}$ un lacet de U. Aussi, la connexité simple de U dans $\mathscr{B}$ (ce qui donne $v_1 v_2^{-1} \sim e_{u(1)}$ dans $\mathscr{B}$) entraîne $u_1 u_2^{-1} \sim e_{b_0}$, i.e. $\langle u_1 \rangle = \langle u_2 \rangle$. Cela signifie que π applique bijectivement (donc homéomorphiquement) $\langle u, U \rangle$ sur U.

L'image réciproque $\pi^{-1} U$ par π du voisinage U est évidemment formée de tous les ensembles $\langle u, U \rangle$. Si on a de plus $\langle u_1, U \rangle \cap \cap \langle u_2, U \rangle \neq \varnothing$ et que $\langle u_0 \rangle$ appartienne à cette intersection,

$$\langle u_1, U \rangle = \langle u_0, U \rangle = \langle u_2, U \rangle$$

en vertu des résultats obtenus ci-dessus. Aussi, $\pi^{-1}U$ est, pour tout ouvert U connexe par arcs et simplement connexe dans $\mathscr{B}$, la réunion disjointe des ensembles ouverts $\langle u, U\rangle$ chacun desquels est appliqué homéomorphiquement sur U. Autrement dit, U est bien recouvert par π.

Comme les ensembles U recouvrent l'espace $\mathscr{B}$ localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, *l'application π est un revêtement.*

Il nous reste à démontrer la *connexité simple* de $\mathscr{B}$. On aura besoin de l'expression explicite de la connexion s de $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ (qui est unique puisque $\mathscr{B}$ est séparé).

On rappelle (voir leçon 4) que tout chemin $u \in \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$ définit par

$$u^{\#}(t)(\tau) = u(t\tau), \quad t, \tau \in I,$$

un chemin $u^{\#} \in \mathscr{P}(b_0, \mathscr{B})$, si bien qu'on détermine pour tout $t \in I$ un point $\langle u^{\#}(t)\rangle$ de $\mathscr{E}$.

Soit $t_0 \in I$, et soit U un ouvert de $\mathscr{B}$ tel que $u(t_0) \in U$, i.e. $u^{\#}(t_0)(1) \in U$. Cela définit un ouvert $\langle u^{\#}(t_0), U\rangle$ de $\mathscr{E}$. Le chemin u étant une application continue, il existe $\delta > 0$ pour lequel $u(t) \in U$, $|t - t_0| < \delta$. En particulier, la restriction $u|_{[t_0, t]}$ de u au segment $[t_0, t]$ est pour $t_0 \leqslant t < t_0 + \delta$ un chemin (généralisé) de U. Comme $u^{\#}(t)$ est évidemment composé de chemins $u^{\#}(t_0)$ et $u|_{[t_0, t]}$ obtenus par un changement de paramètre, il s'ensuit

$$\langle u^{\#}(t)\rangle \in \langle u^{\#}(t_0), U\rangle, \quad t_0 \leqslant t < t_0 + \delta.$$

Problème 2. Démontrer que la dernière propriété subsiste pour $t_0 - \delta < t \leqslant t_0$.

Ainsi, *l'application $t \mapsto \langle u^{\#}(t)\rangle$ est continue*, i.e. c'est un chemin de $\mathscr{E}$.

Ce chemin d'origine $p_0 = \langle e_{b_0}\rangle$ se projette en

$$t \mapsto u^{\#}(t)(1) = u(t),$$

i.e. en u. Il est donc, par suite de l'unicité, le chemin de revêtement $s(p_0, u)$ obtenu à partir de (p_0, π) par la connexion s: Cocyl $\pi \to \mathscr{P}(\mathscr{E})$ du revêtement $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$. Ainsi, *la connexion s de $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ est donnée par*

$$s(p_0, u)(t) = \langle u^{\#}(t)\rangle, \quad t \in I. \tag{1}$$

Soit $w \in \Omega(\mathscr{E}, p_0)$ un lacet arbitraire en p_0 de $\mathscr{E}$, et soit $u = \pi \circ w$ un lacet de $\mathscr{B}$. Comme $u^{\#}(1) = u$, le chemin de revêtement $s(p_0, u)$ joint p_0 au point $\langle u\rangle$ selon la formule (1). D'autre part, l'unicité entraîne $s(p_0, u) = w$, donc $\langle u\rangle = w(1) = p_0$, et le lacet u est homotope dans $\mathscr{B}$ au chemin constant e_{b_0}.

Cela prouve que $\pi_*[w] = e$ dans $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ et que $[w] = e$ dans $\pi_1(\mathscr{E}, p_0)]$ (puisque l'homomorphisme π_* est un monomorphisme ; voir leçon 4). Par conséquent, $\pi_1(\mathscr{E}, p_0) = 1$. □

* * *

On dispose maintenant de presque tout le nécessaire pour décrire tous les revêtements de l'espace connexe donné $\mathscr{B}$.

On suppose $\mathscr{B}$ séparé et localement connexe par arcs, et soit $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un revêtement quelconque de $\mathscr{B}$. On sait (voir leçon 4) que quel que soit le point $p_0 \in \mathscr{E}$, l'application π induit le monomorphisme

$$(\pi_*)_{p_0} : \pi_1(\mathscr{E}, p_0) \to \pi_1(\mathscr{B}, b_0)$$

de $\pi_1(\mathscr{E}, p_0)$ dans $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$, $b_0 = \pi(p_0)$.

Définition 2. On appelle *groupe du revêtement* ξ *au point* p_0, et on note $GR_{p_0}(\xi)$, l'image $\mathrm{Im}\,(\pi_*)_{p_0}$ du monomorphisme $(\pi_*)_{p_0}$.

Ce groupe est par définition un sous-groupe de $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$. $GR_{p_0}(\xi)$ étant un groupe abstrait est isomorphe à $\pi_1(\mathscr{E}, p_0)$.

Le revêtement ξ est simplement connexe si et seulement si $GR_{p_0}(\xi) = \{e\}$, e étant comme toujours l'unité de $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$.

Poursuivons. Il est connu (voir leçon 4) que pour tout chemin v de $\mathscr{E}$ joignant p_0 à un point p_1 qui se projette lui aussi en $b_0 \in \mathscr{B}$ (i.e. p_1 appartient à la fibre $\mathscr{F}_{b_0} = \pi^{-1}(b_0)$ de ξ au-dessus de b_0), on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathscr{E}, p_1) & \xrightarrow{\varphi_v} & \pi_1(\mathscr{E}, p_0) \\ {\scriptstyle (\pi_*)_{p_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_*)_{p_0}} \\ \pi_1(\mathscr{B}, b_0) & \xrightarrow{\varphi_u} & \pi_1(\mathscr{B}, b_0), \end{array}$$

où les flèches horizontales représentent des isomorphismes. Par conséquent, l'isomorphisme inférieur φ_u (qui est un automorphisme intérieur du groupe $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$) transforme le sous-groupe $GR_{p_1}(\xi) = \mathrm{Im}\,(\pi_*)_{p_1}$ dans le sous-groupe $GR_{p_0}(\xi) = \mathrm{Im}\,(\pi_*)_{p_0}$.

[On note que l'espace $\mathscr{E}$ étant localement connexe par arcs avec $\mathscr{B}$ est connexe par arcs, si bien qu'il existe pour tout point p_1 de la fibre $\mathscr{F}_{b_0}$ au moins un chemin v.]

Deux sous-groupes Γ_0 et Γ_1 d'un groupe G sont dits *conjugués* s'il existe un automorphisme intérieur de G qui applique Γ_0 sur Γ_1.

En ces termes de la théorie des groupes, l'affirmation prouvée signifie que *les groupes du revêtement* ξ *aux différents points de la fibre* $\mathscr{F}_{b_0}$ *sont conjugués.*

On voit sans peine que *si le sous-groupe* Γ *de* $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ *est conjugué du sous-groupe* $GR_{p_0}(\xi)$, *il existe un point* $p_1 \in \mathscr{F}_{b_0}$ *tel que*

(2) $$GR_{p_1}(\xi) = \Gamma.$$

En effet, si cette conjugaison est réalisée par l'automorphisme intérieur induit par un élément $[u] \in \pi_1(\mathscr{B}, b_0)$, l'égalité (2) a évidemment lieu pour l'extrémité $p_1 = v(1)$ du chemin $v = s(p_0, u)$ d'origine p_0 qui recouvre u. □

Ainsi, *tous les groupes* $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi)$, $p_0 \in \mathscr{F}_{b_0}$, *constituent la classe des sous-groupes conjugués du groupe* $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$.

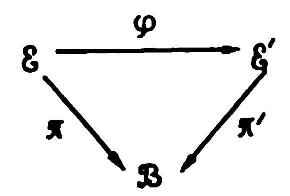
On notera GR (ξ) cette classe.

La classe GR (ξ) peut très bien contenir un seul groupe. Une condition nécessaire et suffisante en est que le sous-groupe $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi)$ soit *invariant* (distingué). Dans ce cas, nous identifierons GR (ξ) à $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi)$. En particulier, $\mathrm{GR}(\xi) = \{e\}$ signifie que $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi) = \{e\}$, i.e. que le revêtement ξ est simplement connexe.

Soient Δ_0 et Δ_1 deux classes des sous-groupes conjugués d'un groupe G. On dit que la classe Δ_0 est *majorée* par la classe Δ_1, et on écrit $\Delta_0 \leqslant \Delta_1$, s'il existe pour un (donc pour tout) sous-groupe Γ_0 de Δ_0 un sous-groupe Γ_1 de Δ_1 tel que $\Gamma_0 \subset \Gamma_1$.

Désormais, on peut énoncer et démontrer la condition nécessaire et suffisante sous laquelle il existe, pour deux revêtements ξ et ξ' donnés de $\mathscr{B}$, au moins un morphisme de ξ dans ξ' sur $\mathscr{B}$.

Proposition 2. *Pour qu'il existe au moins un morphisme*



pour les revêtements $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *et* $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B})$ *de l'espace connexe et localement connexe par arcs* $\mathscr{B}$, *il faut et il suffit que* $\mathrm{GR}(\xi) \leqslant \mathrm{GR}(\xi')$.

D é m o n s t r a t i o n. Si le morphisme φ existe, on a pour tout point $p_0 \in \mathscr{F}_{b_0}$ le diagramme commutatif des homomorphismes de groupes

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathscr{E}, p_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(\mathscr{E}', p'_0) \\ & {\scriptstyle (\pi_*)_{p_0}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle (\pi'_*)_{p'_0}} & \\ & \pi_1(\mathscr{B}, b_0) & \end{array}$$

avec $p'_0 = \varphi(p_0)$, i.e. on a l'égalité $(\pi'_*)_{p'_0} \circ \varphi_* = (\pi_*)_{p_0}$. Aussi

$$\mathrm{Im}\,(\pi_*)_{p_0} = \mathrm{Im}\,((\pi'_*)_{p'_0} \circ \varphi_*) =$$
$$= (\pi'_*)_{p'_0}(\mathrm{Im}\,\varphi_*) \subset (\pi'_*)_{p'_0}(\pi_1(\mathscr{E}', p'_0)) = \mathrm{Im}\,(\pi'_*)_{p'_0},$$

i.e. $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi) \subset \mathrm{GR}_{p'_0}(\xi')$.

Inversement, soient $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$ et $p_0' \in \mathcal{F}'_{b_0}$ des points pour lesquels

$$\mathrm{GR}_{p_0}(\xi) \subset \mathrm{GR}_{p_0'}(\xi'). \tag{3}$$

Chaque morphisme $\varphi: \xi \to \xi'$ n'est autre que le relèvement de π pour l'application π'. Comme la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un relèvement (théorème 1 de la leçon 4) est justement l'inclusion (3), on trouve aux termes de ce théorème un morphisme (qui est unique pour $\mathscr{B}$ séparé) $\varphi: \xi \to \xi'$ tel que $\varphi(p_0) = p_0'$. (L'espace $\mathscr{E}$ est commode par suite de la proposition 4 de la leçon 4 et de l'hypothèse de $\mathscr{B}$ localement connexe par arcs.) □

Définition 3. On dit que le revêtement ξ' est *majoré* par le revêtement ξ, et on écrit $\xi \geqslant \xi'$, s'il existe au moins un morphisme $\xi \to \xi'$.

En ces termes, la proposition 2 signifie que $\xi \geqslant \xi'$ *si et seulement si* $\mathrm{GR}(\xi) \leqslant \mathrm{GR}(\xi')$. (Faites attention: les inégalités sont de sens contraires.)

On a en fait obtenu un résultat plus exact, savoir on a la

Proposition 2'. *Soient* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *et* $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B})$ *deux revêtements de l'espace* $\mathscr{B}$ *connexe et localement connexe par arcs, et soient* $p_0 \in \mathscr{E}$ *et* $p_0' \in \mathscr{E}'$ *des points tels que* $\pi(p_0) = \pi'(p_0')$. *Le morphisme*

$$\varphi: \xi \to \xi'$$

pour lequel $\varphi(p_0) = p_0'$ *existe si et seulement si*

$$\mathrm{GR}_{p_0}(\xi) \subset \mathrm{GR}_{p_0'}(\xi').$$

Il y a unicité pour $\mathscr{B}$ *séparé.* □

Corollaire 1. *Deux revêtements* ξ *et* ξ' *de l'espace séparé connexe et localement connexe par arcs* $\mathscr{B}$ *sont isomorphes si et seulement si*

$$\mathrm{GR}(\xi) = \mathrm{GR}(\xi'). \tag{4}$$

D é m o n s t r a t i o n. L'égalité (4) signifie qu'il existe pour tout point $p_0 \in \mathscr{E}$ qui se projette en $b_0 \in \mathscr{B}$ un point $p_0' \in \mathscr{E}'$ se projetant en b_0 tel que

$$\mathrm{GR}_{p_0}(\xi) = \mathrm{GR}_{p_0'}(\xi'). \tag{5}$$

Mais si l'on a (5), la proposition 2' entraîne l'existence des morphismes

$$\varphi: \xi \to \xi' \quad \text{et} \quad \psi: \xi' \to \xi$$

pour lesquels $\varphi(p_0) = p_0'$ et $\psi(p_0') = p_0$. A l'instar du morphisme identique $\mathrm{id}: \xi \to \xi$, le morphisme $\psi \circ \varphi: \xi \to \xi$ laisse fixe p_0. Aussi, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ par suite de l'unicité. On démontre de même l'égalité $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$. Par conséquent, φ et ψ sont des isomorphismes réciproquement inverses, et les revêtements ξ et ξ' sont isomorphes.

Inversement, on suppose ξ et ξ' isomorphes, et soit $\varphi: \xi \to \xi'$ un isomorphisme quelconque. Conformément à la proposition 2', on a pour tout point $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$

$$\mathrm{GR}_{p_0}(\xi) \subset \mathrm{GR}_{p'_0}(\xi'), \quad \text{où} \quad p'_0 = \varphi(p_0).$$

D'autre part, on a l'isomorphisme inverse $\varphi^{-1}: \xi' \to \xi$ et $\varphi^{-1}(p'_0) = p_0$, si bien que la même proposition entraîne l'inclusion inverse

$$\mathrm{GR}_{p'_0}(\xi') \subset \mathrm{GR}_{p_0}(\xi).$$

Aussi, les revêtements isomorphes ξ et ξ' vérifient-ils l'égalité (5). □

Nous avons en fait obtenu un résultat plus précis, savoir on a le

Corollaire 1'. *L'isomorphisme* $\varphi: \xi \to \xi'$, $\varphi(p_0) = p'_0$, *existe si et seulement si l'égalité* (5) *est remplie dans le groupe* $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$. □

Les revêtements de l'exemple de Zeeman (voir exemple 1 et problème 3 de la leçon 4) montrent que le corollaire 1' ne joue pas pour les espaces non localement connexes par arcs.

Corollaire 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un revêtement* $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ *soit trivial (isomorphe au revêtement* $(\mathcal{B}, \mathrm{id}, \mathcal{B})$) *est*

$$\mathrm{GR}(\xi) = \pi_1(\mathcal{B}, b_0). \ \square$$

La classe Δ des sous-groupes conjugués de $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ est dite *réalisable* s'il existe un revêtement $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ tel que $\Delta = \mathrm{GR}(\xi)$. Selon le corollaire 1, *les classes des revêtements isomorphes de l'espace séparé connexe et localement connexe par arcs* $\mathcal{B}$ *sont en correspondance biunivoque avec les classes réalisables des sous-groupes conjugués de* $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$.

Une description complète des revêtements d'un espace sera donc possible si l'on caractérise les classes réalisables.

* * *

Définition 4. Un revêtement ξ_0 de l'espace connexe et localement connexe par arcs $\mathcal{B}$ est *universel* si $\xi_0 \geqslant \xi$ quel que soit le revêtement ξ de $\mathcal{B}$. Un espace $\mathcal{B}$ admettant au moins un revêtement universel est dit *universellement recouvrable*.

D'après la proposition 2, *le revêtement* ξ_0 *est universel si et seulement si*

$$\mathrm{GR}(\xi_0) \leqslant \mathrm{GR}(\xi) \tag{6}$$

pour tout revêtement ξ *de* $\mathcal{B}$. Aussi, deux revêtements universels ξ_0 et ξ'_0 vérifient l'égalité

$$\mathrm{GR}(\xi_0) = \mathrm{GR}(\xi'_0),$$

si bien qu'ils sont isomorphes. Ainsi, *un revêtement universel de l'espace* $\mathcal{B}$ *est unique à un isomorphisme près.*

On voit en outre que la classe GR (ξ_0) ne dépend pas du choix du revêtement universel ξ_0 et qu'elle est définie univoquement par $\mathscr{B}$. Nous appellerons GR ($\mathscr{B}$) cette classe.

Problème 3. Démontrer que GR ($\mathscr{B}$) est formée d'un seul sous-groupe (qui est automatiquement invariant).

La condition

$$\text{GR}\ (\mathscr{B}) \leqslant \Delta \tag{7}$$

est par définition une condition *nécessaire* pour que la classe Δ des sous-groupes conjugués de $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ soit réalisable.

La condition (6) est manifestement vérifiée quand GR (ξ_0) = $= \{e\}$, i.e. quand ξ_0 est simplement connexe. Par conséquent, *tout revêtement simplement connexe est universel*, si bien que les espaces simplement recouvrables (i.e. semi-localement simplement connexes sous l'hypothèse d'être séparés) sont universellement recouvrables. Ce faisant, $\mathscr{B}$ simplement recouvrables sont caractérisés par l'égalité GR ($\mathscr{B}$) $= \{e\}$ (et la condition nécessaire (7) est donc toujours remplie pour ces espaces).

Remarque 1. Certains espaces séparés connexes et localement connexes par arcs (qui ne sont manifestement pas semi-localement simplement connexes) n'admettent aucun revêtement universel, et quand ils l'admettent, ce revêtement n'est pas simplement connexe.

Exemple 2 et problème 4. Démontrer que le produit d'un nombre dénombrable de circonférences ne possède pas de revêtement universel.

Exemple 3 et problème 5. Soit $\mathscr{B}$ un sous-espace du plan qui est réunion d'une famille dénombrable de circonférences

$$\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+y^2=\frac{1}{n^2}, \quad \text{où } n=1, 2, \ldots \tag{8}$$

Démontrer que $\mathscr{B}$ n'admet pas de revêtement universel.

Exemple 4 et problème 6. Soit $\mathscr{C}$ un cône sur l'espace du problème 5, i.e. $\mathscr{C}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ formé de tous les segments rectilignes qui joignent le point (0, 0, 1) à tous les points des circonférences (8), et soit $\mathscr{C}'$ l'image de $\mathscr{C}$ par la symétrie centrale $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$. Le sous-espace $\mathscr{B} = \mathscr{C} \cup \mathscr{C}'$ de $\mathbb{R}^3$ est évidemment connexe et localement connexe par arcs. Démontrer que

a. *$\mathscr{B}$ est non simplement connexe.* [*Indication.* Considérer le lacet qui parcourt une à une les circonférences de rayon toujours plus petit des sous-espaces $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.]

b. *Tout revêtement π: $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$ de $\mathscr{B}$ est trivial* ($\mathscr{B}$ est non recouvrable au sens de la leçon 2). [*Indication.* $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{B}$ sont contractiles. Il en résulte que π possède une section (relèvement de l'application identique) au-dessus de chacun de ces sous-espaces, qui envoie le point 0 en un point quelconque de la fibre correspondante.]

Etant donné la propriété b, le revêtement trivial id: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}$ est universel, et il est non simplement connexe en vertu de a. Ainsi, $\mathscr{B}$ est un exemple d'espace séparé connexe et connexe par arcs qui admet un revêtement universel non simplement connexe.

Problème 7. Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement ouvert quelconque de $\mathcal{B}$. D
par $[\mathfrak{U}]$ le sous-groupe de $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$ qui est engendré par les classes d'h
des chemins uvu^{-1}, avec u un chemin arbitraire d'origine b_0 de $\mathcal{B}$ et v
quelconque en $u(1)$ tel qu'il existe un élément U du recouvrement $\mathfrak{U}$ pour
$v(t) \in U$ quel que soit $t \in I$. Il s'agit évidemment d'un sous-groupe inva
Démontrer que

a. *L'espace séparé connexe et localement connexe par arcs $\mathcal{B}$ admet un rev ment universel si et seulement s'il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{U}_0$ de $\mathcal{B}$ tel qu'i ait pour tout* $\mathfrak{U}$:

$$[\mathfrak{U}_0] \subset [\mathfrak{U}].$$

b. *Dans ce cas,* $\mathrm{GR}(\mathcal{B}) = [\mathfrak{U}_0]$.

[*Indication.* Démontrer qu'il existe pour tout $\mathfrak{U}$ un revêtement ξ de $\mathcal{B}$ tel que $\mathrm{GR}(\xi) = [\mathfrak{U}]$. C'est une généralisation du théorème 1.]

* * *

Nous n'allons caractériser les classes réalisables des sous-groupes conjugués que pour la classe simple (mais la seule à avoir un intérêt pratique !) des espaces $\mathcal{B}$ simplement recouvrables (= semi-localement simplement connexes). Nous nous servirons à cet effet du

Lemme 1. *Soient, dans le diagramme commutatif*

(9) $$\mathcal{E} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}', \quad \pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}, \quad \pi': \mathcal{E}' \to \mathcal{B},$$

$\mathcal{B}$ un espace connexe et localement connexe par arcs, et $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$, $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ des revêtements. L'application $\pi': \mathcal{E}' \to \mathcal{B}$ est encore un revêtement.

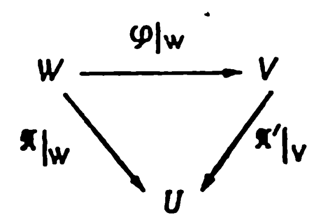
Démonstration. Si un ensemble ouvert $U \subset \mathcal{B}$ est connexe par arcs, dire qu'il est bien recouvert par $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ équivaut à dire que l'ensemble $\pi^{-1}U$ a toutes ses composantes connexes par arcs ouvertes qui se projettent toutes homéomorphiquement sur U. Cela étant, si $\mathcal{B}$ (donc $\mathcal{E}$) est localement connexe par arcs, la condition qui assujettit les composantes connexes par arcs de $\pi^{-1}U$ à être ouvertes est automatiquement vérifiée. En effet, chaque composante connexe par arcs d'un ouvert d'un espace localement connexe par arcs est un ensemble ouvert (voir leçon III.11).

Un ouvert $U \subset \mathcal{B}$ est dit *distingué* s'il est connexe par arcs et si chaque composante connexe par arcs V de l'ensemble $(\pi')^{-1}U$ est bien recouverte par l'application $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$. (On note que $\mathcal{E}'$, étant localement homéomorphe à $\mathcal{E}$, donc à $\mathcal{B}$, est localement connexe par arcs. Par conséquent, la composante V est ouverte dans $\mathcal{E}'$.)

Il est clair que les ensembles distingués recouvrent $\mathcal{B}$ (ils en constituent même une base). Aussi, on a le lemme 1 sous la condition

suffisante que l'application π' recouvre bien chaque ensemble distingué U, i.e. que sur chaque composante connexe par arcs V de $(\pi')^{-1} U$, l'application π' soit un homéomorphisme sur U (la dernière restriction découle des remarques que nous venons de formuler).

Or, la chose est presque évidente. En effet, soit W une composante connexe par arcs quelconque de l'ensemble $\varphi^{-1}V$. Comme l'application φ recouvre bien par hypothèse l'ouvert V, $\varphi|_W : W \to V$ est un homéomorphisme. D'autre part, l'inclusion évidente $\varphi^{-1}V \subset \subset \pi^{-1}U$ entraîne que W est contenue dans l'une des composantes connexes par arcs W' de $\pi^{-1}U$. L'ensemble $\varphi W'$ fait partie de $(\pi')^{-1} U$, il est connexe par arcs et contient $\varphi W = V$. Aussi $\varphi W' = V$. Puisque $\pi|_{W'} = \pi'|_V \circ \varphi|_{W'}$ et $\varphi|_{W'}$ sont des homéomorphismes, la dernière égalité n'a lieu que si $W = W'$. Ainsi, $\pi|_W$ et $\varphi|_W$ du diagramme commutatif



sont des homéomorphismes, et l'application $\pi'|_V$ l'est donc également. □

Problème 8. Démontrer que si les applications $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ et $\pi': \mathscr{E}' \to \mathscr{B}$ du diagramme (9) sont des revêtements et si l'espace connexe $\mathscr{B}$ est séparé et localement connexe par arcs, alors $\varphi: \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est un autre revêtement. (*Un morphisme de revêtements est un revêtement.*) (*Mise en garde.* Démontrer sans faute que φ est une surjection.)

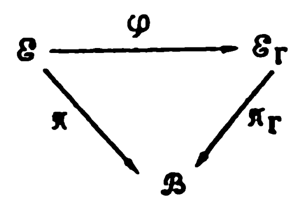
Remarque 2. L'affirmation « l'application π est un revêtement dès que π' et φ le sont » n'est pas juste en général, i.e. *tout composé de deux revêtements n'est pas un revêtement.*

Problème 9. Montrer que le composé $\pi' \circ \varphi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ de deux revêtements $\varphi: \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ et $\pi': \mathscr{E}' \to \mathscr{B}$ est un revêtement si ou bien les feuillets de $\pi': \mathscr{E}' \to \mathscr{B}$ sont en nombre fini, ou bien l'espace $\mathscr{B}$ supposé une fois de plus connexe et localement connexe par arcs est localement simplement connexe. [*Indication.* Démontrer que *tout ouvert simplement connexe* $U \subset \mathscr{B}$ *est bien recouvert par chaque revêtement* $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$.]

* * *

Les isomorphismes $\alpha: \xi \to \xi$ d'un revêtement $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ sur lui-même en sont évidemment des *automorphismes* (ou *transformations de revêtement* et *de glissement*). Ils forment un groupe noté Aut ξ.

Par définition, Aut ξ opère à gauche sur $\mathscr{E}$. On constate sans peine qu'il s'agit d'une *action discrète*, i.e. (voir exemple 5 de la leçon 2) tout point $p \in \mathscr{E}$ admet un voisinage V tel que $\alpha V \cap V = \varnothing$ pour tout automorphisme non identique $\alpha \in \text{Aut}\ \xi$. (En effet, on accepte pour V tout voisinage de p qui recouvre bien l'ouvert $U = \pi(V)$.) Aussi, tout sous-groupe Γ de Aut ξ opère discrètement lui aussi, et l'espace des orbites $\mathscr{E}_\Gamma = \mathscr{E}/\Gamma$ est contenu dans le diagramme commutatif



avec φ un revêtement (on le sait déjà). En vertu du lemme 1, l'application induite

$$\pi_\Gamma : \mathscr{E}_\Gamma \to \mathscr{B}, \quad \Gamma p \mapsto \pi(p),$$

est un autre revêtement.

Si $\mathscr{E}$ est simplement connexe (i.e. c'est le revêtement ξ qui l'est), la proposition 3 de la leçon 4 fait que le groupe fondamental de l'espace $\mathscr{E}_\Gamma$ est isomorphe (plus précisément, anti-isomorphe vu que Γ opère à gauche) au groupe Γ. Ainsi, *si le revêtement* ξ *est simplement connexe, le groupe du revêtement* $\xi_\Gamma = (\mathscr{E}_\Gamma, \pi_\Gamma, \mathscr{B})$ *est anti-isomorphe au groupe* Γ *pour tout sous-groupe* Γ *de* Aut ξ.

D'autre part, *si* ξ *est simplement connexe, le groupe* Aut ξ *opère transitivement sur chaque fibre* $\mathscr{F}_b$, $b \in \mathscr{B}$, *de ce revêtement*. En effet, si l'espace $\mathscr{E}$ est simplement connexe, la condition (5) sous laquelle il existe un isomorphisme $\xi \to \xi'$ transformant le point p_0 dans le point p_0' est satisfaite pour $\xi' = \xi$ quels que soient p_0 et p_0' d'une même fibre. Par conséquent, l'application π_Γ est une bijection pour $\Gamma = \text{Aut}\ \xi$ et, partant, un isomorphisme (parce que c'est un revêtement). Ainsi, l'action du groupe Aut ξ sur $\mathscr{E}$ remplit toutes les conditions de la proposition 2 de la leçon 4, si bien qu'aux termes de cette proposition, *le groupe* Aut ξ *est isomorphe pour* ξ *simplement connexe au groupe fondamental* $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ *de* $\mathscr{B}$ *en un point (absolument quelconque!)* $b_0 \in \mathscr{B}$.

Si l'on ne veut pas utiliser la proposition 3 de la leçon 4, on construit l'isomorphisme

$$j : \text{Aut}\ \xi \to \pi_1(\mathscr{B}, b_0) \tag{10}$$

si l'on choisit un point $p_0 \in \mathscr{F}_{b_0}$ dont il est fonction et si l'on pose

$$j(\alpha) = [\pi \circ v], \quad \alpha \in \text{Aut}\ \xi, \tag{11}$$

pour tout automorphisme $\alpha: \xi \to \xi$, v étant un chemin quelconque de $\mathscr{E}$ qui joint p_0 au point $\alpha(p_0)$.

Problème 10. Vérifier immédiatement que

1° *la formule* (11) *définit parfaitement une application* (10) (ne pas oublier que $\mathscr{E}$ est simplement connexe par hypothèse);

2° *cette application est un homomorphisme*;

3° *l'homomorphisme* (10) *est un isomorphisme* (utiliser la proposition 2 et le corollaire 1).

Le groupe $GR_{\Gamma p_0}(\xi_\Gamma)$ du revêtement $\xi_\Gamma = (\mathscr{E}_\Gamma, \pi_\Gamma, \mathscr{B})$ au point Γp_0 comprend par définition les classes d'homotopie $[u]$ des lacets $u \in \Omega\mathscr{B}$ tels que leur chemin de revêtement d'origine Γp_0 dans $\mathscr{E}_\Gamma$ est un lacet, i.e. leur chemin de revêtement v d'origine p_0 dans $\mathscr{E}$ a pour extrémité un point de l'orbite Γp_0. Puisque ces chemins v sont exactement les chemins de $\mathscr{E}$ qui joignent p_0 aux points $\alpha(p_0)$, $\alpha \in \Gamma$, on a

$$GR_{\Gamma p_0}(\xi_\Gamma) = j\Gamma.$$

Par suite du corollaire 1 de la proposition 2, cela démontre le *théorème de classification des revêtements* qui a été notre objectif principal:

Théorème 2. *Pour tout espace $\mathscr{B}$ séparé connexe, localement connexe par arcs, semi-localement simplement connexe (= simplement recouvrable), il existe la correspondance biunivoque*

$$[\xi] \Leftrightarrow GR(\xi) \tag{12}$$

entre les classes des revêtements ξ isomorphes (sur $\mathscr{B}$) de $\mathscr{B}$ et les classes des sous-groupes conjugués du groupe fondamental $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$. □

Corollaire 1. *Pour qu'un espace séparé connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe soit non recouvrable (i.e. tout son revêtement est trivial), il faut et il suffit qu'il soit simplement connexe.* □

Corollaire 2. *Tout espace séparé simplement recouvrable $\mathscr{B}$ est homéomorphe à l'espace des orbites $\mathscr{E}/\Gamma$, où $\mathscr{E}$ est un espace de revêtement simplement connexe de $\mathscr{B}$ et Γ le groupe des automorphismes du revêtement $\mathscr{E} \to \mathscr{B}$.*

Remarque 3. On perfectionne le théorème 2 sur le plan formel si l'on introduit les *revêtements pointés*, i.e. les couples (ξ, p_0) formés d'un revêtement $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ et d'un point $p_0 \in \mathscr{E}$ quelconque. Deux revêtements pointés (ξ, p_0) et (ξ', p_0') sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme φ de ξ sur ξ' tel que $\varphi(p_0) = p_0'$. (Une condition nécessaire en est évidemment que p_0 et p_0' soient au-dessus d'un même $b_0 \in \mathscr{B}$.) Dans ce cas, les classes des revêtements pointés isomorphes sont en correspondance biunivoque avec les sous-groupes de $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$:

$$[(\xi_0, p_0)] \Leftrightarrow GR_{p_0}(\xi). \tag{13}$$

Ainsi énoncé, le théorème 2 est analogue au théorème fondamental de la théorie des corps de Galois, ce qui autorise certains à donner le nom de *correspondance de Galois* à (13) (et à (12)). [L'analogie avec la théorie de Galois est loin d'être formelle, si bien que celle-ci et la théorie des revêtements se présentent en géométrie algébrique abstraite moderne comme deux spécialisations d'une même théorie.]

* * *

Un analogue de l'isomorphisme (10) existe également pour $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ arbitraires.

Problème 11. On sait (voir leçon 4) que le groupe $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ opère transitivement à droite sur chaque fibre $\mathscr{F}_{b_0}$, $b_0 \in \mathscr{B}$, d'un revêtement $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ quelconque. Démontrer que *cette action commute avec l'action à gauche du groupe* Aut ξ, i.e. qu'on a pour tout automorphisme $\alpha: \xi \to \xi'$, tout élément $\gamma \in \pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ et tout point $p \in \mathscr{F}_{b_0}$:

$$\alpha(p\gamma) = \alpha(p)\gamma.$$

[*Indication.* Si $\gamma = [u]$, où $u \in \Omega\mathscr{B}$, alors $p\gamma = s(p, u)(1)$, avec s une connexion de ξ.]

En termes de représentations, l'affirmation de ce problème signifie que la correspondance

$$\alpha \mapsto \alpha\big|_{\mathscr{F}_{b_0}} \tag{14}$$

définit un homomorphisme du groupe Aut ξ dans le groupe Aut $\mathscr{F}_{b_0}$ des $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$-*automorphismes* du $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$-espace à droite $\mathscr{F}_{b_0}$ (des applications bijectives équivariantes $\mathscr{F}_{b_0} \to \mathscr{F}_{b_0}$).

Problème 12. Démontrer que l'*homomorphisme* (14) *est un isomorphisme de* Aut ξ *sur* Aut $\mathscr{F}_{b_0}$. [*Indication.* C'est un monomorphisme vu l'unicité due à la proposition 2. Pour prouver qu'il s'agit d'un épimorphisme, on choisit un point $p_0 \in \mathscr{F}_{b_0}$, on construit par la proposition 2 pour tout automorphisme $\beta: \mathscr{F}_{b_0} \to \mathscr{F}_{b_0}$ l'automorphisme $\alpha: \xi \to \xi$ tel que $\alpha(p_0) = \beta(p_0)$ et on utilise la transitivité de l'action du groupe $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$.]

On démontre en théorie des représentations que *si le groupe G opère transitivement sur l'ensemble $\mathscr{F}$, alors le groupe* Aut $\mathscr{F}$ *de tous les G-automorphismes de $\mathscr{F}$ est isomorphe au groupe quotient* $N\Gamma/\Gamma$, où Γ est le *stabilisateur* d'un point $p_0 \in \mathscr{F}$ quelconque, qui est formé de tous les éléments $\gamma \in G$ tels que $p_0\gamma = p$, et $N\Gamma$ est le *normalisateur* du sous-groupe Γ (le plus grand sous-groupe dont Γ est le sous-groupe distingué).

L'action de G étant transitive, il existe effectivement pour tout automorphisme $\alpha \in$ Aut $\mathscr{F}$ un élément g de G tel que $\alpha(p_0) = p_0 g$. L'égalité $p_0 g_1 = p_0 g_2$ entraîne $p_0 g_1 g_2^{-1} = p_0$, i.e. $g_1 g_2^{-1} \in \Gamma$, si bien que la classe à gauche Γg

de g suivant le sous-groupe Γ ne dépend pas du choix de g. De plus, si $\gamma \in \Gamma$, alors

$$p_0 g\gamma = \alpha(p_0)\gamma = \alpha(p_0\gamma) = \alpha(p_0) = p_0 g,$$

et, inversement, si $p_0 g\gamma = p_0 g$, alors $\alpha(p_0\gamma) = \alpha(p_0)\gamma = (p_0 g)\gamma = p_0 g = \alpha(p_0)$, donc $p_0\gamma = p_0$, i.e. $\gamma \in \Gamma$. Ainsi, $\gamma \in \Gamma$ si et seulement si $p_0 g\gamma = p_0 g$, i.e. si $g\gamma g_0^{-1} \in \Gamma$. Autrement dit, $\Gamma = g^{-1}\Gamma g$, i.e. $g \in \mathcal{N}\Gamma$. Par conséquent, la formule

$$\alpha \mapsto \Gamma g \tag{15}$$

définit bien une application $\operatorname{Aut} \mathcal{F} \to \mathcal{N}\Gamma/\Gamma$. Si $\alpha, \beta \in \operatorname{Aut} \mathcal{F}$ et $\alpha(p_0) = p_0 g$, $\beta(p_0) = p_0 h$, alors $(\alpha \circ \beta)(p_0) = \alpha(p_0 h) = \alpha(p_0) h = (p_0 g) h = p_0 (gh)$. Ainsi, l'application (15) est un homomorphisme. Si $\Gamma g = \Gamma$, i.e. $g \in \Gamma$, alors $\alpha(p_0) = p_0$, donc $\alpha(p_0 g_1) = \alpha(p_0) g_1 = p_0 g_1$ pour tout $g_1 \in G$. Comme G opère transitivement, cela signifie que $\alpha = \mathrm{id}$. Ainsi, l'application (15) est un monomorphisme. Soit enfin $p_0 g = p_0 h$, avec $g, h \in G$, i.e. $gh^{-1} \in \Gamma$. On a $(\gamma g)(\gamma h)^{-1} \in \Gamma$, si bien que $p_0 \gamma g = p_0 \gamma h$ pour tout élément $\gamma \in \mathcal{N}\Gamma$. Aussi la formule

$$\alpha(p) = p_0 \gamma g, \quad p \in \mathcal{F},$$

g étant un élément du groupe G tel que $p_0 g = p$, définit parfaitement une application (manifestement bijective et équivariante, i.e. une application qui est un automorphisme du G-espace $\mathcal{F}$) $\alpha: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$. On a $\alpha(p_0) = p_0\gamma$ par construction, et le monomorphisme (15) est par conséquent un isomorphisme.

Le groupe quotient $\mathcal{N}\Gamma/\Gamma$, où $\Gamma = \mathrm{GR}_{p_0}(\xi)$ est un sous-groupe de $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)$, s'appelle *groupe de Weyl* du revêtement ξ au point $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$. On le note $\mathrm{Weyl}_{p_0}(\xi)$. Ainsi, *quel que soit le revêtement* $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ *de l'espace* $\mathcal{B}$ *séparé connexe et localement connexe par arcs, le groupe* $\operatorname{Aut} \xi$ *est isomorphe au groupe* $\mathrm{Weyl}_{p_0}(\xi)$ *du revêtement* ξ *en* $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$ *quelconque.*

Dans cet isomorphisme, il correspond à l'automorphisme $\alpha: \xi \to \xi$ la classe de $\gamma \in \pi_1(\mathcal{B}, b_0)$, $b_0 = \pi(p_0)$, suivant $\mathrm{GR}_{p_0}(\xi)$, où γ est la classe d'homotopie du lacet $\pi \circ v$, avec v un chemin quelconque de $\mathcal{E}$ entre p_0 et $\alpha(p_0)$.

S'agissant d'un revêtement ξ simplement connexe (= universel), on retrouve l'isomorphisme (9).

* * *

La théorie de Galois réserve une place toute particulière aux corps normaux auxquels sont associés les sous-groupes invariants. Il leur correspond en théorie des revêtements les revêtements ξ dont le sous-groupe invariant est $\mathrm{GR}(\xi)$. Ces revêtements sont dits *réguliers*. Le groupe des automorphismes $\operatorname{Aut} \xi$ d'un revêtement régulier est évidemment isomorphe au groupe quotient $\pi_1(\mathcal{B}, b_0)/\mathrm{GR}(\xi)$.

Problème 13. Le groupe $\operatorname{Aut} \xi$, avec $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ quelconque, opère manifestement à gauche sur chaque fibre $\mathcal{F}_{b_0}$, $b_0 \in \mathcal{B}$. Montrer (sous des hypothèses classiques sur $\mathcal{B}$) que *le revêtement* ξ *est régulier si et seulement si cette action est transitive* (on trouve pour

tout p_0 et tout p_1 et $\mathcal{F}_b$, un automorphisme $\alpha: \xi \to \xi'$ tel que $\alpha(p_0) = p_1$). En déduire que *chaque revêtement régulier est un fibré principal* (voir leçon 1) *de groupe* Aut ξ.

Problème 14. Démontrer que *le revêtement* $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ *est régulier si et seulement si, quels que soient les points* $p_0, p_1 \in \mathcal{F}_b$, *et le lacet* v *en* p_0 *de l'espace* $\mathcal{E}$, *le chemin d'origine* p_1, *revêtement du lacet* $\pi \circ v$, *est un lacet.*

Exemple 5. Soit $\mathcal{B}$ une surface orientable à deux anses (fig. A), et soit $\mathcal{E}$ la surface (fig. B) déduite de trois $\mathcal{B}$ à anses coupées si

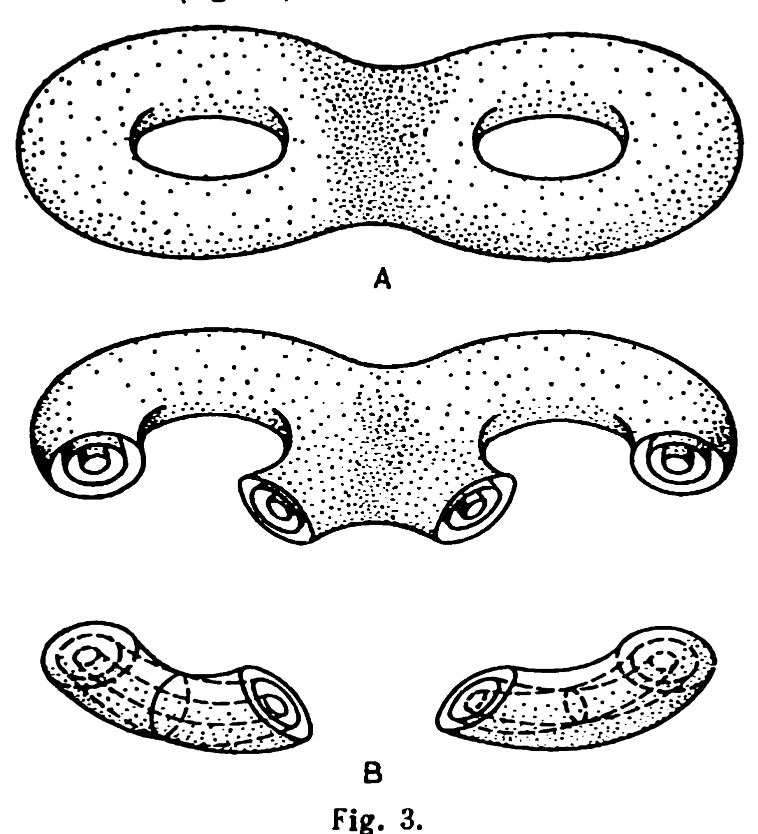
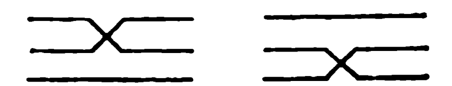


Fig. 3.

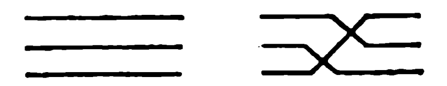
l'on colle à gauche le premier et le deuxième exemplaire et à droite le deuxième et le troisième. On le visualise par le schéma conventionnel suivant :



Il est clair que $\mathcal{E}$ est connexe par arcs, si bien que le triplet $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, avec $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ la projection canonique, constitue un revêtement. Le chemin recouvrant le lacet de $\mathcal{B}$ qui fait un tour du parallèle de l'anse gauche, est un lacet si et seulement si son origine est un point du troisième feuillet. Par conséquent, ξ n'est pas régulier.

Problème 15. Démontrer que le groupe des automorphismes du revêtement construit est trivial, i.e. qu'il se réduit à l'application identique.

Exemple 6 et problème 16. Calculer le groupe des automorphismes du revêtement de la surface obtenue par le schéma suivant:



et montrer en particulier qu'il opère transitivement sur les fibres (si bien que le revêtement est régulier).

Exemple 7. On sait (voir exemple 5 de la leçon 2) que dès que le groupe Γ opère discrètement sur l'espace $\mathscr{E}$, le triplet $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, où $\mathscr{B} = \mathscr{E}/\Gamma$ est l'espace des orbites et $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ la projection canonique $p \mapsto \Gamma p$, constitue un revêtement. L'application $L_\gamma: p \mapsto \gamma p$ est évidemment pour tout $\gamma \in \Gamma$ un automorphisme de ξ. Du moment que Γ opère transitivement sur chaque orbite, *le revêtement* ξ *est régulier.*

Problème 17. Démontrer que *la correspondance* $\gamma \mapsto L_\gamma$ *est un isomorphisme du groupe* Γ *sur* Aut ξ. [*Indication.* Soit $p_0 \in \mathscr{E}$. Tout automorphisme $\varphi \in \text{Aut}\,\xi$ vérifie l'égalité $\varphi(p_0) = \gamma p_0$, $\gamma \in \Gamma$. Comme $\varphi(p_0) = L_\gamma(p_0)$, on a $\varphi(p) = L_\gamma(p)$ pour tout point $p \in \mathscr{E}$.] Démontrer de même que, dans cet isomorphisme, les applications équivariantes $\mathscr{E} \to \mathscr{E}$ (qui sont évidemment des automorphismes de ξ) correspondent aux éléments du centre de Γ.

* * *

Nous aurons besoin en temps et lieu de la proposition suivante (cf. problème 5 de la leçon 2).

Proposition 3. *Si l'espace* $\mathscr{E}$ *est pour le revêtement* $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ *une variété séparée différentiable et si*

a) π *est régulier*;

b) *le groupe de ses automorphismes est formé des difféomorphismes, il existe sur* $\mathscr{B}$ *une structure différentiable* A *unique par rapport à laquelle le revêtement* $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ *est différentiable.*

D é m o n s t r a t i o n. On commence comme toujours par l'unicité.

On suppose que A existe. Soit (U, h) une carte connexe bien recouverte quelconque de $\mathscr{B}$. Si V est une composante de l'image réciproque $\pi^{-1}U$, alors

$$U = \pi V \quad \text{et} \quad h = k \circ \sigma, \tag{16}$$

où $k = h \circ \pi$ et $\sigma: U \to V$ est l'inverse du difféomorphisme $\pi: V \to U$ (section de π au-dessus de U). Cela veut dire que l'atlas sur $\mathscr{B}$ à éléments les cartes (U, h) est reconstitué de façon unique à partir de l'atlas sur $\mathscr{E}$ à éléments (V, k), d'où l'unicité de A.

Passons à l'existence. On considère les formules (16) comme définition des cartes (U, h), i.e., plus précisément, on définit (U, h) sur tout ensemble connexe bien recouvert $U \subset \mathscr{B}$, tel que certaines composantes V de son image réciproque $\pi^{-1}U$ soient des voisinages de coordonnées de $\mathscr{E}$, par la formule $h = k \circ \sigma$, k étant une application de coordonnées sur V. On aura évidemment le résultat voulu si l'on montre la compatibilité de deux cartes (U, h) quelconques. Ce faisant, il est clair qu'il suffit de vérifier la dernière propriété pour deux (U, h) avec un même U.

Autrement dit, il faut prouver que si les cartes (V, k) et (V_1, k_1) de $\mathscr{E}$ sont telles que

1) on ait $\pi V = \pi V_1$;

2) l'ensemble $U = \pi V = \pi V_1$ soit connexe, bien recouvert par π et les ensembles V et V_1 soient des composantes de $\pi^{-1}U$ (si bien que l'application π sur V et V_1 admet les inverses $\sigma: U \to V$ et $\sigma_1: U \to V_1$ respectivement), alors le produit de composition

$$h_1 \circ h^{-1} = h_1 \circ \sigma_1 \circ \pi \circ k^{-1}: kV \to k_1 V_1$$

pour $h: U \to \mathbb{R}^n$ et $h_1: U \to \mathbb{R}^n$ définies par

$$h = k \circ \sigma, \quad h_1 = k_1 \circ \sigma_1$$

est un difféomorphisme. Il suffit de démontrer (c'est clair) que c'est

$$\sigma_1 \circ \pi: V \to V_1$$

qui est un difféomorphisme.

On note à ce propos que le revêtement $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ étant régulier, il existe son automorphisme $\varphi: \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ qui transforme la composante V dans la composante V_1, et l'application $\varphi \circ \sigma$ constitue une section de π au-dessus de U qui envoie V en V_1. L'unicité des sections (voir leçon 4, corollaire 1 de la proposition 4) fait que $\varphi \circ \sigma$ coïncide avec σ_1. Donc

$$\sigma_1 \circ \pi = \varphi|_V.$$

On achève la démonstration si l'on se rappelle que l'automorphisme φ est un difféomorphisme par hypothèse. □

Problème 18. Démontrer que *le groupe des automorphismes d'un revêtement différentiable quelconque est formé des difféomorphismes.*

On applique en particulier (voir exemple 7) la proposition 3 à un revêtement $\mathscr{E} \to \mathscr{E}/\Gamma$, où Γ est un groupe arbitraire des difféomorphismes de la variété $\mathscr{E}$, qui opère discrètement sur $\mathscr{E}$.

Corollaire 1. *Quel que soit le groupe Γ des difféomorphismes de la variété séparée différentiable connexe $\mathscr{E}$, qui opère discrètement sur $\mathscr{E}$, l'espace des orbites $\mathscr{E}/\Gamma$ possède une structure naturelle de variété différentiable par rapport à laquelle l'application de passage au quotient*

$$\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{E}/\Gamma$$

est un revêtement différentiable. □

LEÇON 6

Fibrés vectoriels. — Sections des fibrés vectoriels. — Morphismes de fibrés vectoriels. — Structures quaternioniques et complexes sur un fibré vectoriel réel. — Exemples de fibrés vectoriels. — Fibrés associés aux GL (n; K)-fibrés principaux. — Cocycles de recollement des fibrés vectoriels. — Fibrés vectoriels et classes de cohomologie des cocycles matriciels.

Soit $\mathbb{K}$ le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

[Le lecteur peut (et doit!) vérifier que tous les résultats de la présente leçon et de la leçon suivante restent en fait entiers si $\mathbb{K}$ est le corps des quaternions $\mathbb{H}$, et cela en dépit de la multiplication non commutative dans $\mathbb{H}$ (pour les quaternions voir leçon 7); on n'a qu'à écrire les facteurs à droite des vecteurs, i.e. on considère sur $\mathbb{H}$ les *espaces vectoriels à droite*. (S'agissant des corps commutatifs $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, le fait que tel vectoriel soit un espace à droite ou un espace à gauche n'a en principe aucune importance, mais il en va autrement pour $\mathbb{H}$ non commutatif.) On se placera donc des fois dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{H}$. Il y a plus. Quand il y a avantage à le faire, on écrira les facteurs numériques dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de la même façon que dans $\mathbb{H}$.]

Définition 1. Le triplet $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ formé de deux espaces topologiques $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$ et d'une application continue

(1) $$\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$$

est un *fibré vectoriel de rang n sur* $\mathbb{K}$ (c'est un fibré *réel* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, un fibré *complexe* quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et un fibré *quaternionique* ou *symplectique* pour $\mathbb{K} = \mathbb{H}$) si

a) pour tout point $b \in \mathscr{B}$, l'ensemble

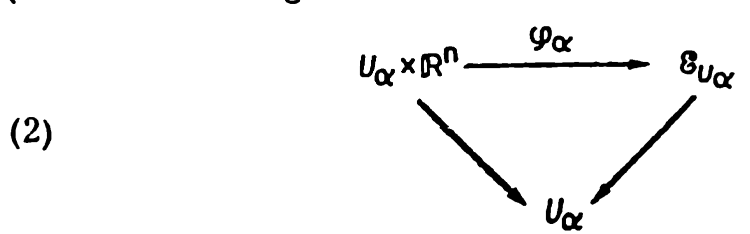
$$\mathscr{F}_b = \pi^{-1}(b)$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$;

b) (*condition de trivialité locale*) il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de $\mathscr{B}$ et des homéomorphismes $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$, $\mathscr{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$, tels que

b₁) pour tout point $(b, \mathbf{x}) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, on ait $\varphi_\alpha(b, \mathbf{x}) \in \mathscr{F}_b$ (i.e. on a le diagramme commutatif

(2)



où la flèche à gauche est la projection canonique $(b, \mathbf{x}) \mapsto b$ du produit direct $U_\alpha \times \mathcal{R}^n$ sur U_α et la flèche à droite la restriction à $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ de l'application (1));

b₂) pour tout point $b \in \mathscr{B}$, l'application

$$\varphi_{\alpha, b}: \mathcal{R}^n \to \mathscr{F}_b$$

définie par

$$\varphi_{\alpha, b}(\mathbf{x}) = \varphi_\alpha(b, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n,$$

soit un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Conformément à la terminologie générale de la leçon 1, l'espace $\mathscr{B}$ (noté également $\mathscr{B}^\xi$ ou $\mathscr{B}(\xi)$) s'appelle *espace de base* du fibré vectoriel ξ, l'espace $\mathscr{E}$ (noté également $\mathscr{E}^\xi$ ou $\mathscr{E}(\xi)$) en est l'*espace total*, et l'application π (qu'on désigne de même par π^ξ ou $\pi(\xi)$) est la *projection*. Bien souvent, on ne fait pas de différence entre ξ et π.

L'espace vectoriel $\mathscr{F}_b$ (ou encore $\mathscr{F}_b^\xi$, $\mathscr{F}_b(\xi)$) est la *fibre* du fibré ξ (de la projection π) au-dessus d'un point $b \in \mathscr{B}$.

Le rang n du fibré vectoriel ξ est également sa *dimension* (ce qui se note $\dim \xi$ ou $\dim_{\mathbb{K}} \xi$).

L'homéomorphisme φ_α du diagramme (2) constitue une *trivialisation* de ξ au-dessus de l'ensemble ouvert U_α, *voisinage trivialisant*. On donne des fois le nom de *trivialisation* au couple $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Un recouvrement $\{U_\alpha\}$ formé des voisinages trivialisants est dit *trivialisant*. La famille $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de trivialisations $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ constitue un *atlas trivialisant*.

* * *

Une application continue $s: \mathscr{B} \to \mathscr{E}$ vérifiant $\pi \circ s = \mathrm{id}$ s'appelle *section* du fibré ξ. Elle est une section si et seulement si $s(b) \in \mathscr{F}_b$ pour tout $b \in \mathscr{B}$, i.e. si elle prend un vecteur $s(b)$ dans chaque fibre $\mathscr{F}_b$. La dernière circonstance explique le nom de *champ de ξ-vecteurs* sur $\mathscr{B}$ qu'on donne à une section de ξ.

Problème 1. Démontrer que

1° pour n'importe quelles sections s, s_1, s_2 et tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$, les formules

$$(s_1 + s_2)(b) = s_1(b) + s_2(b), \quad (\lambda s)(b) = \lambda s(b), \quad b \in \mathscr{B},$$

définissent les sections $s_1 + s_2$, λs de ξ, et *l'ensemble* $\Gamma\xi$ *de toutes les sections du fibré vectoriel* ξ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *pour les opérations* $(s_1, s_2) \mapsto s_1 + s_2$, $(\lambda, s) \mapsto \lambda s$, l'élément zéro de $\Gamma\xi$ étant la section nulle 0 qui associe à chaque point $b \in \mathscr{B}$ l'élément zéro de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_b$;

2° pour toute fonction continue f sur $\mathscr{B}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et toute section $s \in \Gamma\xi$, la formule

$$(fs)(b) = f(b)\, s(b), \quad b \in \mathscr{B},$$

définit la section $fs \in \Gamma\xi$, et *l'espace vectoriel* $\Gamma\xi$ *est le* $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathscr{B}$*-module de toutes les fonctions continues sur* $\mathscr{B}$ *à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *pour l'opération* $(f, s) \mapsto fs$.

Le triplet $(\mathscr{E}_U, \pi_U, U)$, avec $\mathscr{E}_U = \pi^{-1}U$ et $\pi_U = \pi\,|_U$, est évidemment un fibré vectoriel pour chaque sous-espace $U \subset \mathscr{B}$. Il s'appelle *partie* de ξ sur U et se note $\xi\,|_U$.

Si U est un voisinage trivialisant, chaque trivialisation $\varphi\colon U \times \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_U$ définit dans $\Gamma(\xi\,|_U)$ les sections

$$s_1, \ldots, s_n \tag{3}$$

par les formules

$$s_1(b) = \varphi(b, \mathbf{e}_1), \ldots, s_n(b) = \varphi(b, \mathbf{e}_n),$$

$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ étant la base standard de l'espace $\mathbb{K}^n$. Les vecteurs $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ forment pour tout point $b \in U$ une base de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_b$, si bien que chaque section $s\colon U \to \mathscr{E}_U$ définit sur U les fonctions $s^1, \ldots, s^n\colon U \to \mathbb{K}$ vérifiant pour tout $b \in \mathscr{B}$ la relation

$$s(b) = s^1(b)\, s_1 + \ldots + s^n(b)\, s_n$$

qui définit ces fonctions de façon unique.

Problème 2. Montrer que *les fonctions* $s^1, \ldots, s^n$ *sont continues* (appartiennent à l'algèbre $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}U$).

Aussi on a dans le $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}U$-module $\Gamma(\xi\,|_U)$

$$s = s^1 s_1 + \ldots + s^n s_n, \quad s^1, \ldots, s^n \in \mathsf{F}_{\mathbb{K}}U.$$

Ainsi, *le* $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}$ *U-module* $\Gamma(\xi\,|_U)$ *est par définition un module libre de rang* n *de base* (3).

Inversement, soit U un ouvert de l'espace $\mathscr{B}$ tel que $\Gamma(\xi\,|_U)$ soit un module libre de rang n, et soit (3) sa base quelconque. On définit l'application $\varphi\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{E}_U$ par

$$\varphi(b, \mathbf{x}) = x^i s_i(b), \quad b \in U, \quad \mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

On vérifie automatiquement (le faire !) que φ est une trivialisation du fibré ξ au-dessus de U.

Ainsi, on a la

Proposition 1. *Un ensemble ouvert* $U \subset \mathscr{B}$ *est un voisinage trivialisant pour le fibré* ξ *si et seulement si le* $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}U$*-module* $\Gamma(\xi\,|_U)$ *est un module libre de rang* n*, et les bases* (3) *de ce module sont en corres-*

pondance biunivoque canonique avec les trivialisations φ *du fibré* ξ *au-dessus de* U. □

Etant donné ce résultat, les bases (3) du module $\Gamma(\xi|_U)$ sont autant de trivialisations de ξ au-dessus de U.

Convention. Dans la suite de l'exposé, nous dirons également des trivialisations (3) que ce sont des *bases du module* $\Gamma\xi$ *sur* U. Ces abréviations en matière de terminologie s'avèrent des fois fort utiles.

* * *

Soient $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ et $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B}')$ deux fibrés vectoriels. Une application continue $\varphi: \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est dite *fibre à fibre* si $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ (i.e. les points $p_1, p_2 \in \mathscr{E}$ appartiennent à une même fibre) entraîne $\pi'(p_1') = \pi'(p_2')$ (i.e. les points $p_1' = \varphi(p_1)$, $p_2' = \varphi(p_2)$ sont eux aussi dans une même fibre).

Problème 3. Démontrer que pour chaque application fibre à fibre $\varphi: \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$, la formule

$$\hat{\varphi}(b) = \pi'(\varphi(p)), \quad p \in \pi^{-1}(b),$$

définit bien l'application continue

$$\hat{\varphi}: \mathscr{B} \to \mathscr{B}',$$

ligne inférieure du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \xrightarrow{\varphi} & \mathscr{E}' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ \mathscr{B} & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \mathscr{B}' \end{array}$$

et que pour tout $b \in \mathscr{B}$ l'application

$$\varphi_b: \mathscr{F}_b \to \mathscr{F}_{b'}, \quad b' = \hat{\varphi}(b),$$

induite par φ est continue.

Définition 2. Une application fibre à fibre φ telle que toutes les applications φ_b, $b \in \mathscr{B}$, soient linéaires, est un *morphisme* du fibré vectoriel ξ dans le fibré vectoriel ξ' (ce qui se note $\varphi: \xi \to \xi'$). Lorsque $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$, le morphisme φ, avec $\hat{\varphi} = \mathrm{id}$, s'appelle *morphisme sur* $\mathscr{B}$. Un morphisme sur $\mathscr{B}$ qui est un homéomorphisme est dit *isomorphisme*. (Dans ce cas, l'homéomorphisme inverse $\varphi^{-1}: \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ est également un morphisme sur $\mathscr{B}$, donc un isomorphisme.) Deux fibrés ξ et ξ' sur $\mathscr{B}$ pour lesquels on trouve au moins un isomorphisme $\xi \to \xi'$ sont *isomorphes*.

Les isomorphismes de la forme $\xi \to \xi$ sont des *automorphismes*.

Problème 4. Démontrer qu'un morphisme $\varphi: \xi \to \xi'$ sur $\mathcal{B}$ est un isomorphisme si et seulement si l'application linéaire $\varphi_b: \mathcal{F}_b \to \mathcal{F}'_b$ est, pour tout point $b \in \mathcal{B}$, un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Nous désignons par Mor (ξ, ξ') l'ensemble de tous les morphismes $\xi \to \xi'$ sur $\mathcal{B}$. Il s'agit d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (même pour $\mathbb{K} = \mathbb{H}$) et d'un module sur l'algèbre $\mathsf{F}\mathcal{B}$ pour les opérations définies de façon évidente.

Chaque morphisme $\varphi: \xi \to \xi'$ de fibrés vectoriels sur $\mathcal{B}$ définit par la formule

$$s \mapsto \varphi \circ s, \quad s \in \Gamma\xi,$$

l'application linéaire

$$\varphi \circ : \Gamma\xi \to \Gamma\xi'$$

d'espaces vectoriels de sections.

Puisque

$$(\varphi \circ fs)(b) = \varphi_b (f(b)\, s(b)) = f(b)\, \varphi_b (s(b)) = f(\varphi \circ s)(b),$$

pour toute fonction $f \in \mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$, $\varphi \circ$ *est une application* $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$*-linéaire.*

On vérifie de même que la correspondance $\varphi \mapsto \varphi \circ$ définit une application $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-linéaire du $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-module Mor (ξ, ξ') dans le $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-module $\mathrm{Hom}_{\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\xi')$ de toutes les applications $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-linéaires $\Gamma\xi \to \Gamma\xi'$.

Problème 5. Démontrer que toute application $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}$-linéaire $\Gamma\xi \to \Gamma\xi'$ s'écrit $\varphi \circ$ pour un morphisme $\varphi: \xi \to \xi'$ bien défini. [*Indication.* Voir proposition 3 de la leçon 11.]

Cela signifie que *les modules* Mor (ξ, ξ') *et* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\xi')$ *sont canoniquement isomorphes,* d'où l'identification

$$\mathrm{Mor}(\xi, \xi') = \mathrm{Hom}_{\mathsf{F}_{\mathbb{K}}\mathcal{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\xi').$$

La propriété reste entière pour $\mathbb{K} = \mathbb{H}$.

* * *

Si l'on effectue une extension complexe de toutes les fibres $\mathcal{F}_b$ d'un fibré vectoriel réel ξ, on obtient nécessairement un fibré vectoriel complexe de même rang qu'on note $\xi^{\mathbb{C}}$ et qu'on appelle *complexifié* de ξ.

Pareillement, si l'on munit toutes les fibres $\mathcal{F}_b$ d'un fibré vectoriel complexe ξ de la structure réelle (i.e. si l'on les assimile, par suite de l'inclusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, à des espaces vectoriels réels), on a un

fibré réel de rang deux fois plus grand qu'on note $\xi_{\mathbf{R}}$ et que nous appelons *décomplexifié* de ξ. La multiplication par i définit sur $\xi_{\mathbf{R}}$ l'automorphisme $I: \xi_{\mathbf{R}} \to \xi_{\mathbf{R}}$ qui vérifie l'égalité

$$I^2 = -\text{id}. \tag{4}$$

Inversement, la donnée de l'automorphisme $I: \eta \to \eta$ soumis à la relation (4) sur un fibré réel η de rang $2n$ définit sur chaque fibre de η la structure d'espace vectoriel complexe par rapport à laquelle η est (le vérifier !) un fibré vectoriel complexe ξ (tel que $\xi_{\mathbf{R}} = \eta$). Ainsi, les *fibrés vectoriels complexes sont exactement les fibrés réels pour lesquels on définit l'automorphisme I vérifiant la relation* (4).

Ce fait vaut aux automorphismes I le nom de *structures complexes.*

Les fibrés quaternioniques sont de même *les fibrés réels pour lesquels on définit deux automorphismes I et J vérifiant les relations*

$$I^2 = -\text{id}, \quad J^2 = -\text{id}, \quad IJ = -JI.$$

(On n'introduit pas le troisième automorphisme K associé à la clef k puisqu'il s'exprime moyennant I et J.)

* * *

Exemples de fibrés vectoriels.

Exemple 1. Soient $\mathscr{B}$ un espace topologique quelconque, et $\mathcal{F}$ un espace vectoriel arbitraire sur $\mathbf{K}$. Le triplet $(\mathscr{B} \times \mathcal{F}, \pi, \mathscr{B})$, avec $\pi: \mathscr{B} \times \mathcal{F} \to \mathscr{B}$ la projection du produit direct sur le premier facteur, est un fibré vectoriel. Le recouvrement trivialisant $\{U_\alpha\}$ se réduit dans ce cas à l'élément $U = \mathscr{B}$, et la trivialisation $\varphi: \mathscr{B} \times \mathbf{K}^n \to \mathscr{B} \times \mathcal{F}$ est définie par le choix d'une base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ dans $\mathcal{F}$. On la définit par

$$\varphi(b, \mathbf{x}) = (b, \alpha^{-1}(\mathbf{x})), \quad b \in \mathscr{B}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{K}^n,$$

où $\alpha: \mathcal{F} \to \mathbf{K}^n$ est un isomorphisme de coordonnées dans la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Ce fibré se note $\theta^n_{\mathscr{B}}$. On appelle $\theta^n_{\mathscr{B}}$ (ainsi que tout fibré vectoriel qui lui est isomorphe) *fibré vectoriel trivial de rang n.*

Aux termes de la proposition 1, *un fibré vectoriel ξ est trivial si et seulement si le $\mathsf{F}_{\mathbf{K}}\mathscr{B}$-module $\Gamma\xi$ est libre et si son rang est égal au rang n du fibré ξ.*

Les trivialisations φ d'un fibré vectoriel ξ au-dessus d'un ouvert $U \subset \mathscr{B}$ ne sont autres que les isomorphismes du fibré θ^n_U sur le fibré $\xi|_U$, et dire que U est un voisinage trivialisant, c'est dire que $\xi|_U$ est trivial.

Exemple 2. Soient $\mathscr{X}$ une variété différentiable de dimension n, $\mathrm{T}\mathscr{X}$ la variété des vecteurs tangents sur $\mathscr{X}$ (voir définition 3 de la

leçon III.15), et $\pi: \mathrm{T}\mathscr{X} \to \mathscr{X}$ la projection canonique qui associe à chaque vecteur $A \in \mathrm{T}\mathscr{X}$ son point de tangence $p \in \mathscr{X}$ (i.e. un point tel que $A \in \mathrm{T}_p\mathscr{X}$). Par définition, la projection π a pour fibre $\pi^{-1}(p)$, $p \in \mathscr{X}$, l'espace tangent $\mathrm{T}_p\mathscr{X}$, et chaque carte (U, h) de $\mathscr{X}$ définit une carte $(\mathrm{T}U, \mathrm{T}h)$ de la variété $\mathrm{T}\mathscr{X}$ telle que

$$\mathrm{T}U = \bigsqcup_{p \in U} \mathrm{T}_p\mathscr{X} = \pi^{-1}U$$

et l'application $\mathrm{T}h: \mathrm{T}U \to \mathbb{R}^{2n}$ soit donnée par la formule

$$(\mathrm{T}h)(A) = (x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^n), \quad A \in \mathrm{T}U,$$

où $x^1, \ldots, x^n$ sont les coordonnées du point $p = \pi(A)$ dans la carte (U, h) et $a^1, \ldots, a^n$ les coordonnées du vecteur A dans la base

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$$

de l'espace $\mathrm{T}_p\mathscr{X}$. Il y a intérêt à remplacer $\mathrm{T}h$ par l'application $(h^{-1} \times \mathrm{id}) \circ \mathrm{T}h: \mathrm{T}U \to U \times \mathbb{R}^n$ définie par

$$A \mapsto (p, \mathbf{a}), \quad p = \pi(A), \quad \mathbf{a} = (a^1, \ldots, a^n).$$

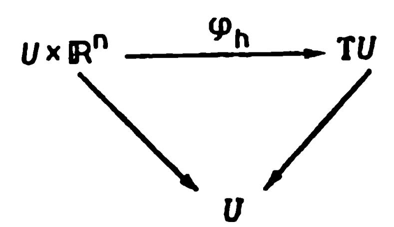
Soit

$$\varphi_h : U \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{T}U$$

l'application réciproque:

$$\varphi_h(p, \mathbf{a}) = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \quad p \in U, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

L'application φ_h est un homéomorphisme qui clôt le diagramme commutatif



i.e. c'est une trivialisation du fibré $(\mathrm{T}\mathscr{X}, \pi, \mathscr{X})$ au-dessus du voisinage U.

Ainsi, *le triplet* $\tau_{\mathscr{X}} = (\mathrm{T}\mathscr{X}, \pi, \mathscr{X})$ *est un fibré vectoriel de rang* n.

Le fibré $\tau_{\mathscr{X}}$ est également noté $\tau\mathscr{X}$ (ou $\tau(\mathscr{X})$). On l'appelle *fibré tangent sur la variété* $\mathscr{X}$ (ou *de la variété* $\mathscr{X}$).

On note que *le fibré tangent* $\tau_{\mathscr{X}}$ *a pour fibres* $\pi^{-1}(p)$ *les espaces tangents* $\mathrm{T}_p\mathscr{X}$ *de la variété* $\mathscr{X}$.

La notion de fibré tangent nous servira de fil directeur dans l'étude théorique des fibrés vectoriels.

Une variété $\mathscr{X}$ est dite *parallélisable* si le fibré $\tau\mathscr{X}$ est trivial (cf. leçon III.16).

S'agissant de $\mathscr{X}$ analytique complexe, $\tau_{\mathscr{X}}$ est évidemment un fibré sur $\mathbb{C}$, et

$$(\tau_{\mathscr{X}})_{\mathbb{R}} = \tau_{\mathscr{X}_{\mathbb{R}}}$$

avec $\mathscr{X}_{\mathbb{R}}$ la variété $\mathscr{X}$ considérée comme variété analytique réelle par suite de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ (voir leçon III.11).

Exemple 3. (Le lecteur est supposé connaître le contenu de la leçon 1.) La multiplication

$$(A, \mathbf{x}) \mapsto A\mathbf{x}$$

des matrices carrées A d'ordre n par les colonnes $\mathbf{x}$ à n éléments définit (à condition d'écrire les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sous forme de colonnes) l'action du groupe linéaire complet GL $(n; \mathbb{K})$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, qui est une *action linéaire* (ou encore une *représentation*). Cela signifie que pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}\,(n; \mathbb{K})$, l'application $L_A : \mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ est un opérateur linéaire (c'est justement pour que cette action soit linéaire lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, qu'on fait l'hypothèse de $\mathbb{K}^n$ vectoriel à droite). Aussi, on définit pour tout GL $(n; \mathbb{K})$-fibré principal $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un GL $(n; \mathbb{K})$-fibré $\xi = \xi\,[\mathbb{K}^n]$ de fibre-type $\mathbb{K}^n$, et, pour tout point $b \in \mathscr{B}$ (qui est par définition l'orbite de l'action à droite du groupe $\mathscr{G} = \mathrm{GL}\,(n; \mathbb{K})$ sur l'espace total $\mathscr{E}$ du fibré ξ) et tout point $\mathbf{p}$ de l'orbite, la formule

$$j_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = [\mathbf{p}, \mathbf{x}]_{\mathscr{G}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$$

(cf. formule (12) de la leçon 1) définit l'homéomorphisme $j = j_{\mathbf{p}} : \mathbb{K}^n \to \mathscr{F}_b$ de l'espace $\mathbb{K}^n$ sur la fibre $\mathscr{F}_b$ de ξ au-dessus de b. Si $\mathbf{q}$ est un autre point de l'orbite b et que $\mathbf{p} = \mathbf{q}A$, $A \in \mathrm{GL}\,(n; \mathbb{K})$, alors

$$(j_{\mathbf{q}}^{-1} \circ j_{\mathbf{p}})(\mathbf{x}) = j_{\mathbf{q}}^{-1}[\mathbf{p}, \mathbf{x}] = j_{\mathbf{q}}^{-1}[\mathbf{q}, A\mathbf{x}] = A\mathbf{x},$$

i.e. $j_{\mathbf{q}}^{-1} \circ j_{\mathbf{p}} = L_A$, $A \in \mathrm{GL}\,(n; \mathbb{K})$. Le groupe GL $(n; \mathbb{K})$ opérant linéairement sur $\mathbb{K}^n$, la structure d'espace vectoriel transportée sur $\mathscr{F}_b$ à partir de $\mathbb{K}^n$ par l'application $j_{\mathbf{p}}$, i.e. qui est définie par

$$[\mathbf{p}, \mathbf{x}] + [\mathbf{p}, \mathbf{y}] = [\mathbf{p}, \mathbf{x} + \mathbf{y}], \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n,$$
$$\lambda\,[\mathbf{p}, \mathbf{x}] = [\mathbf{p}, \lambda\mathbf{x}], \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n,$$

ne dépend pas du choix du point $\mathbf{p}$. Ainsi, *chaque fibre $\mathscr{F}_b$ de ξ est munie de la structure canonique d'espace vectoriel n-dimensionnel sur* $\mathbb{K}$.

On suppose maintenant le fibré principal ξ être localement trivial, i.e. soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert de $\mathscr{B}$ tel qu'il existe pour tout α l'homéomorphisme équivariant

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathrm{GL}\,(n\,;\,\mathbb{K}) \to \mathscr{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U$$

de GL $(n; K)$-espaces principaux. On vérifie automatiquement (le faire !) que la formule

$$\varphi_\alpha(b, \mathrm{x}) = [\varphi(b, E), \mathrm{x}]_{\xi}, \quad b \in U_\alpha, \quad \mathrm{x} \in K^n$$

(E étant comme toujours la matrice unité), définit la trivialisation

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times K^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$$

de ξ au-dessus de U_α.

On a donc établi que *pour tout* GL $(n; K)$*-fibré principal localement trivial* ξ, *le fibré associé* $\xi = \xi[K^n]$ *est un fibré vectoriel.*

* * *

La réciproque est également juste.

Proposition 2. *Pour tout fibré vectoriel* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, *il existe un* GL $(n; K)$*-fibré principal localement trivial* ξ *tel que*

$$\xi = \xi[K^n].$$

Démonstration. Soit $\mathscr{E}$ le sous-espace du produit direct

$$\underbrace{\mathscr{E} \times \ldots \times \mathscr{E}}_{n \text{ fois}},$$

formé des points $\mathrm{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ dont toutes les composantes $p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{E}$ appartiennent à une même fibre de ξ (i.e. elles vérifient les relations $\pi(p_1) = \ldots = \pi(p_n)$) et constituent une base dans cette fibre. On pose $\pi(\mathrm{p}) = \pi(p_1)$, d'où l'application (évidemment continue et surjective)

$$\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}.$$

(Le triplet correspondant $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ s'appelle *fibré des repères* du fibré vectoriel ξ.)

D'autre part, la multiplication matricielle

$$(5) \qquad (\mathrm{p}, A) \mapsto \mathrm{p}A, \quad \mathrm{p} = (p_1, \ldots, p_n), \quad A = \| a_i^j \|,$$

avec $\mathrm{p}A$ la ligne $(q_1, \ldots, q_n)$ des vecteurs $q_i = p_j a_i^j$ (les facteurs numériques sont à droite des vecteurs, ce qui est essentiel pour $K=H$), définit évidemment l'action libre à droite de GL $(n; K)$ sur l'espace $\mathscr{E}$, dont les orbites sont justement les fibres de ξ. Si l'action (5) est

a) continue ;

b) principale (i.e. la translation associée est continue), alors le triplet $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ est donc un fibré principal, et la formule

$$(6) \qquad [\mathrm{p}, \mathrm{x}] \mapsto \mathrm{p}\mathrm{x} = p_i x^i,$$

$$\mathrm{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathscr{E}, \quad \mathrm{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in K^n,$$

définit (manifestement de manière unique) un morphisme $\xi[K^n] \to \to \xi$ pour le fibré vectoriel associé $\xi[K^n]$. Il nous reste à démontrer (en plus de a) et b)) que

c) le morphisme (6) est un isomorphisme ;

d) le fibré principal ξ est localement trivial.

On note en premier lieu que pour tout voisinage U trivialisant pour ξ, chaque base (3) du module $\Gamma(\xi|_U)$ (trivialisation φ de ξ au-dessus de U) définit par la formule

$$\mathrm{s}(b) = (s_1(b), \ldots, s_n(b)),\ b \in U,$$

une section de ξ au-dessus de U. (Faites attention. On identifie donc les trivialisations de ξ au-dessus de U et les sections de ξ au-dessus de U.) On définit l'application

$$\varphi : U \times \mathrm{GL}(n;\ K) \to \mathscr{E}U = \pi^{-1}U$$

si l'on pose

$$\varphi(b, A) = \mathrm{s}(b)A,\quad b \in U,\quad A \in \mathrm{GL}(n;\ K).$$

La réciproque de cette application (évidemment continue) est l'application continue

$$\mathrm{p} \mapsto (b,\ A),\quad \mathrm{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathscr{E}_U,$$

où $b = \pi(\mathrm{p})$ et A est une matrice de colonnes les coordonnées des vecteurs $p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{F}_b$ dans la base $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_b$. (*Question*. Pourquoi la dernière application est-elle continue?) L'application φ est de plus équivariante pour l'action naturelle à droite

$$(7)\qquad (b, A)B = (b, AB),\quad b \in U,\quad A,\ B \in \mathrm{GL}(n;\ K),$$

du groupe $\mathrm{GL}(n;\ K)$ sur le produit $U \times \mathrm{GL}(n;\ K)$ (voir exemple 1 de la leçon 1), i.e.

$$\varphi(b, A)B = \varphi(b, AB)$$

pour tout point $b \in U$ et n'importe quelles matrices A et B de $\mathrm{GL}(n;\ K)$; on note que le sous-espace $\mathscr{E}_U$ est invariant par l'action de $\mathrm{GL}(n;\ K)$ sur l'espace $\mathscr{E}$, ce qui en fait un $\mathrm{GL}(n;\ K)$-espace. Ainsi, φ *est un homéomorphisme équivariant*.

Vu la continuité de (7), il en résulte que l'action (5) jouit de même de cette propriété (sur chaque $\mathscr{E}_U$, donc partout du moment que les voisinages U recouvrent $\mathscr{B}$). Pareillement, la translation pour (5) est continue elle aussi. Par conséquent, ξ est un fibré principal, et l'application φ est évidemment une trivialisation de ξ au-dessus de U, d'où la trivialité locale de ce fibré.

4 Зак. 590

Cela prouve a), b) et d). On aura c) sous la condition suffisante que pour toute trivialisation (U, φ) de ξ, l'application

$$\varphi^{-1}: \mathscr{E}_U \to U \times K^n$$

transforme chaque point $p \in \mathscr{E}_U$ en (b, x), avec $b = \pi(p)$ et x la colonne des composantes du vecteur $p \in \mathscr{F}_b$ dans la base $s_1(b) = \varphi(b, \mathrm{e}_1), \ldots, s_n(b) = \varphi(b, \mathrm{e}_n)$. Aussi φ^{-1} induit

$$\xi|_U \to \xi[K^n]|_U,$$

application réciproque de la restriction de (6) à U.

Ainsi, l'application (6) est un isomorphisme sur U, donc partout. □

Remarque 1. Le fait d'introduire les fibrés vectoriels nous permet donc, pour $\mathscr{F} = K^n$ et $\mathscr{G} = \mathrm{GL}(n; K)$, de définir directement les $\mathscr{G}$-fibrés localement triviaux $\xi = \xi[\mathscr{F}]$ sans faire recours aux fibrés principaux ξ. La chose est possible dès que l'espace $\mathscr{F}$ est muni d'une structure et $\mathscr{G}$ représente le groupe de tous les automorphismes de $\mathscr{F}$ qui conservent cette structure (à condition qu'on confère à $\mathscr{G}$ une topologie suffisamment bonne qui garantit la continuité de toutes les applications nécessaires). Dans la leçon 7, nous reverrons ce problème dans une optique quelque peu différente.

* * *

Pour tout fibré vectoriel $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ il existe par définition un recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de $\mathscr{B}$ formé des voisinages trivialisants. Soient U_α et U_β deux éléments de $\mathfrak{U}$ qui se rencontrent. On définit pour tout point b de leur intersection l'application

$$\varphi_{\beta\alpha}(b) = \varphi_{\beta,b}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,b}: K^n \to K^n,$$

où $\varphi_{\alpha,b}$ et $\varphi_{\beta,b}$ sont les applications $\mathbb{R}^n \to \mathscr{F}_b$ induites par les trivialisations $\varphi_\alpha: U_\alpha \times K^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$ et $\varphi_\beta: U_\beta \times K^n \to \mathscr{E}_{U_\beta}$ (voir b) de la définition 1). Il s'agit d'une application linéaire inversible, i.e. d'un élément du groupe $\mathrm{GL}(n; K)$. Aussi

$$\varphi_{\beta\alpha}: b \mapsto \varphi_{\beta\alpha}(b)$$

définit

(8) $$\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(n; K),$$

appelée *application (ou fonction) de transition* (de φ_α à φ_β).

Lemme 1. *L'application*

$$\varphi: U \to \mathrm{GL}(n; K)$$

d'un espace topologique U dans le groupe $\mathrm{GL}(n; K)$ *est continue si et seulement s'il en est ainsi pour l'application*

$$\hat{\varphi}: U \times K^n \to K^n$$

donnée par la formule

$$\hat{\varphi}(b, \mathrm{x}) = \varphi(b)\,\mathrm{x}, \quad b \in U, \quad \mathrm{x} \in \mathbb{K}^n.$$

Démonstration. Si φ est continue, $\hat{\varphi}$ l'est évidemment aussi (le démontrer!). Inversement, on suppose $\hat{\varphi}$ continue, auquel cas c'est également la propriété de toutes les applications $U \to \mathbb{K}^n$ de la forme

$$\varphi_i : b \mapsto \varphi(b)\,\mathrm{e}_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

où $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ est une fois de plus la base standard de l'espace $\mathbb{K}^n$. Ainsi, les applications $U \to \mathbb{K}$:

$$\varphi_i^j : b \mapsto \varphi_i^j(b), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

avec $\varphi_i^j(b)$ les composantes du vecteur $\varphi(b)\,\mathrm{e}_i$, sont continues elles aussi. On a le résultat voulu si l'on dit que les nombres $\varphi_i^j(b)$ sont précisément les éléments de la matrice $\varphi(b) \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$. □

Quand $U = U_\alpha \cap U_\beta$ et $\varphi = \varphi_{\beta\alpha}$, l'application $\hat{\varphi}$ n'est autre que le composé $\mathrm{pr} \circ (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)$ de l'homéomorphisme $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : U \times \mathbb{K}^n \to U \times \mathbb{K}^n$ et de la projection $\mathrm{pr}: U \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, d'où sa continuité et, aux termes du lemme 1, celle de $\varphi_{\beta\alpha}$.

Ainsi, *toutes les applications de transition* $\varphi_{\beta\alpha}$ *sont des applications continues.*

Quels que soient l'ensemble U et le groupe G, l'ensemble de toutes les applications $U \to G$ est un groupe pour les opérations

$$\varphi \mapsto \varphi^{-1}, \quad (\varphi, \psi) \mapsto \varphi\psi$$

définies par

$$\varphi^{-1}(b) = \varphi(b)^{-1}, \quad (\varphi\psi)(b) = \varphi(b)\,\psi(b), \quad b \in U.$$

(Qu'on ne confonde pas φ^{-1} et une application réciproque ni $\varphi\psi$ et une composée de deux applications!) Ce faisant, si U est un espace topologique, si G est un groupe topologique et si les applications φ et ψ sont continues, alors il en est de même de φ^{-1} et $\varphi\psi$ (le démontrer!).

En particulier, on définit pour $\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ l'application $\varphi_{\beta\alpha}^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$, et s'agissant de $\varphi_{\beta\alpha}$ et $\varphi_{\gamma\beta}$, on définit pour $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \varnothing$ l'application

$$(\varphi_{\gamma\beta}|_U)(\varphi_{\beta\alpha}|_U) : U \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K}),$$

avec $U = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ qu'on note $\varphi_{\gamma\beta}\varphi_{\beta\alpha}$ pour alléger les formules. Il en découle de suite d'après la définition des $\varphi_{\beta\alpha}$:

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} \varphi_{\beta\alpha}^{-1} &= \varphi_{\alpha\beta} \quad \text{sur } U_\alpha \cap U_\beta, \\ \varphi_{\gamma\beta}\varphi_{\beta\alpha} &= \varphi_{\gamma\alpha} \quad \text{sur } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma, \end{aligned}$$

avec α, β, γ quelconques (tels que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ et $U_\alpha \cap U_\beta \cap \cap U_\gamma \neq \varnothing$ respectivement).

Définition 3. Soient $\mathscr{B}$ un espace topologique, $\mathscr{G}$ un groupe topologique, et $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert de $\mathscr{B}$. Une famille $\varphi = \{\varphi_{\beta\alpha}\}$ d'applications continues

$$\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathscr{G}$$

définies pour tout α et tout β, tels que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, est un *cocycle de* $\mathfrak{U}$ (plus précisément, d'un nerf du recouvrement $\mathfrak{U}$; voir leçon III.21) *sur le groupe* $\mathscr{G}$ si elle remplit les relations (9). Les cocycles sur GL $(n; \mathbb{K})$ s'appellent de mêmes *cocycles matriciels.*

Ainsi, *chaque fibré vectoriel* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *définit pour tout recouvrement trivialisant* $\mathfrak{U}$ *de* $\mathscr{B}$ *un cocycle matriciel* $\varphi = \{\varphi_{\beta\alpha}\}$.

Nous dirons que φ est un *cocycle de recollement du fibré* ξ et nous le désignerons par φ_ξ.

Proposition 3. *Soient* $\mathscr{B}$ *un espace topologique,* $\mathfrak{U}$ *son recouvrement ouvert et* $\varphi = \{\varphi_{\beta\alpha}\}$ *un cocycle matriciel quelconque de* $\mathfrak{U}$ *sur le groupe* GL $(n; \mathbb{K})$. *Il existe un fibré vectoriel* ξ *(unique à un isomorphisme près) de rang n et d'espace de base* $\mathscr{B}$ *qui admet* $\mathfrak{U}$ *comme recouvrement trivialisant et* φ *comme cocycle de recollement.*

D é m o n s t r a t i o n. *Unicité.* Dire que les fibrés vectoriels $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ et $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B})$ possédant un recouvrement trivialisant $\mathfrak{U}$ admettent un même cocycle de recollement φ, c'est dire qu'il existe pour ξ et ξ' des trivialisations

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}, \quad \varphi'_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}'_{U_\alpha},$$

telles qu'on ait pour tout α et tout β, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, l'égalité

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha = \varphi_\beta'^{-1} \circ \varphi'_\alpha: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^n \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^n,$$

donc l'égalité

$$\varphi'_\beta \circ \varphi_\beta^{-1} = \varphi'_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}: \mathscr{E}_{U_\alpha \cap U_\beta} \to \mathscr{E}'_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

Aussi, la formule

$$f(p) = (\varphi'_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})(p) \quad \text{si } p \in \mathscr{E}_{U_\alpha} \quad (\text{i.e. } \pi(p) \in U_\alpha)$$

définit parfaitement une application $f: \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ qui est (on le vérifie aisément) un isomorphisme $\xi \to \xi'$.

Existence. Soit la réunion disjointe

$$E = \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{K}^n)$$

d'espaces $U_\alpha \times \mathbb{K}^n$. On désigne par $(b, \mathbf{x})_\alpha$ le point $(b, \mathbf{x}) \in U_\alpha \times \times \mathbb{K}^n$ de E, $b \in U_\alpha$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ quelconques, et on munit E de la relation $\sim$ telle que $(b, \mathbf{x})_\alpha \sim (c, \mathbf{y})_\beta$, avec $b \in U_\alpha$, $c \in U_\beta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \in \mathbb{K}^n$, si et seulement si $c = b$ et $\mathbf{y} = \varphi_{\beta\alpha}(b)\,\mathbf{x}$. Les relations (9)

entraînent de suite qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Soit $\mathscr{E}$ l'espace quotient correspondant (muni de la topologie quotient) de E. La formule

$$\pi\,[b, \mathbf{x}]_\alpha = b, \quad b \in \mathscr{B}, \quad \mathbf{x} \in K^n,$$

où α est un indice tel que $b \in U_\alpha$ et $[b, \mathbf{x}]_\alpha$ est la classe d'équivalence du point $(b, \mathbf{x})_\alpha$, définit parfaitement une surjection continue (pourquoi est-elle continue ?)

$$\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}.$$

Quel que soit α, l'égalité

$$\varphi_\alpha\,(b, \mathbf{x}) = [b, \mathbf{x}]_\alpha, \; b \in U_\alpha, \; \mathbf{x} \in K^n,$$

définit évidemment une application fibre à fibre continue

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times K^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha},$$

où $\mathscr{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$ est un sous-espace de $\mathscr{E}$, formé de tous les points $[b, \mathbf{x}]_\alpha$, $b \in U_\alpha$, $\mathbf{x} \in K^n$. Il y a plus. On établit aisément que

$$[b, \mathbf{x}]_\alpha \mapsto (b, \mathbf{x}), \; b \in U_\alpha, \; \mathbf{x} \in K^n,$$

définit bien l'application continue (pourquoi cette propriété ?) $\mathscr{E}_{U_\alpha} \to U_\alpha \times K^n$, réciproque de φ_α. Par conséquent, φ_α est un homéomorphisme fibre à fibre, i.e. le triplet $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ satisfait à la condition $\mathbf{b}_1$) de la définition 1.

On a la condition a) (et $\mathbf{b}_2$)) si l'on dit que, pour tout $b \in \mathscr{B}$, la fibre $\mathscr{F}_b$ de l'application π est formée de tous les points de la forme $[b, \mathbf{x}]_\alpha$, α étant quelconque tel que $b \in U_\alpha$. Si $\mathbf{x}$ est de plus dans U_β, alors $[b, \mathbf{x}]_\alpha = [b, \mathbf{y}]_\beta$, où $\mathbf{y} = \varphi_{\beta\alpha}\,(b)\,\mathbf{x}$. Vu la linéarité de $\varphi_{\beta\alpha}\,(b) : K^n \to K^n$, on en déduit que les formules

$$[b, \mathbf{x}]_\alpha + [b, \mathbf{y}]_\alpha = [b, \mathbf{x} + \mathbf{y}]_\alpha, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K^n,$$
$$\lambda\,[b, \mathbf{x}]_\alpha = [b, \lambda\mathbf{x}]_\alpha, \qquad \mathbf{x} \in K^n,$$

définissent complètement dans $\mathscr{F}_b$ une structure d'espace vectoriel, ce qui donne a) et $\mathbf{b}_2$) à la fois.

Ainsi, ξ est un fibré vectoriel et les applications φ_α en sont des trivialisations. De plus

$$(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)\,(b, \mathbf{x}) = \varphi_\beta^{-1}\,[b, \mathbf{x}]_\alpha = \varphi_\beta^{-1}\,[b, \varphi_{\beta\alpha}\,(b)\,\mathbf{x}]_\beta = (b, \varphi_{\beta\alpha}\,(b)\,\mathbf{x})$$

pour tout point $(b, \mathbf{x}) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times K^n$, si bien que $\varphi = \{\varphi_{\beta\alpha}\}$ donné est justement le cocycle de recollement φ_ξ de ce fibré. □

La construction décrite explique en particulier pourquoi φ_ξ s'appelle cocycle de recollement. Par analogie, on donne le nom de *fonctions de recollement* aux applications $\varphi_{\beta\alpha}$, composantes de φ_ξ.

* * *

La proposition 2 à elle seule ne suffit pas pour réduire les fibrés vectoriels aux cocycles matriciels. En effet, φ_ξ dépend du choix des trivialisations φ_α, si bien qu'il peut changer avec φ_α.

Mais on contrôle facilement cette non-univocité.

Soient $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}\}$ et $\{\varphi'_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}\}$ deux familles des trivialisations d'un fibré vectoriel ξ au-dessus d'un même recouvrement trivialisant $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$. La formule

$$\gamma_\alpha(b) = \varphi_{\alpha, b}^{-1} \circ \varphi'_{\alpha, b} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad b \in U_\alpha,$$

définit pour tout α une application

$$\gamma_\alpha : U_\alpha \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$$

liée à l'homéomorphisme

$$\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi'_\alpha : U \times \mathbb{K}^n \to U \times \mathbb{K}^n$$

par

$$(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi'_\alpha)(b, \mathbf{x}) = (b, \gamma_\alpha(b)\mathbf{x}), \quad b \in U_\alpha, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n,$$

si bien que γ_α est continue conformément au lemme 1.

Par construction,

$$\varphi'_{\beta\alpha}(b) = \varphi'^{-1}_{\beta, b} \circ \varphi'_{\alpha, \beta} = \varphi'^{-1}_{\beta, b} \circ \varphi_{\beta, b} \circ \varphi_{\beta, b}^{-1} \circ \varphi_{\alpha, b} \circ \varphi_{\alpha, b}^{-1} \circ \varphi'_{\alpha, b} = \gamma_\beta(b)^{-1} \circ \varphi_{\beta\alpha}(b) \circ \gamma_\alpha(b)$$

pour tout point $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, i.e.

$$\varphi'_{\beta\alpha} = \gamma_\beta^{-1} \varphi_{\beta\alpha} \gamma_\alpha \tag{10}$$

dans le groupe de toutes les applications continues $U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ (on sous-entend certes que γ_α et γ_β sont les restrictions à $U_\alpha \cap U_\beta$ de ces applications).

Nous dirons que deux cocycles $\varphi = \{\varphi_{\beta\alpha}\}$ et $\varphi' = \{\varphi'_{\beta\alpha}\}$ du recouvrement $\mathfrak{U}$ sur le groupe $\mathscr{G}$ sont *cohomologues* si l'on trouve des applications continues

$$\gamma_\alpha : U_\alpha \to \mathscr{G} \tag{11}$$

telles qu'on ait (10) pour tout α et tout β, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$. En ces termes, l'affirmation démontrée équivaut à dire que *les cocycles de recollement d'un même fibré vectoriel ξ qui correspondent à des trivialisations φ_α différentes (mais à un même recouvrement trivialisant $\mathfrak{U}$) sont cohomologues.*

La relation de cohomologie des cocycles constitue évidemment une relation d'équivalence. Les classes correspondantes s'appellent *classes de cohomologie* du recouvrement $\mathfrak{U}$ sur le groupe $\mathscr{G}$. Nous employons les notations suivantes: $[\varphi]$ désigne la classe de cohomologie du cocycle φ, et $H^1(\mathfrak{U}; \mathscr{G})$ est l'ensemble de toutes les classes de cohomologie de $\mathfrak{U}$ sur $\mathscr{G}$.

[Il y a lieu de noter que l'ensemble $H^1(\mathfrak{U}; \mathscr{G})$ ne porte en général aucune structure naturelle de groupe.]

A la lumière des développements ci-dessus, on a évidemment le
Théorème 1. *La formule*

$$\xi \mapsto [\varphi_\xi]$$

établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble de classes des fibrés vectoriels isomorphes ξ *de rang* n *sur l'espace* $\mathscr{B}$ *qui admettent le recouvrement trivialisant* $\mathfrak{U}$ *donné, et l'ensemble* H^1 $(\mathfrak{U}; \mathrm{GL}(n; \mathbb{K}))$. □

Son complémentaire utile dit que *chaque cocycle* $\varphi' = \{\varphi'_{\beta\alpha}\}$ *cohomologue à un cocycle de recollement* φ_ξ *d'un fibré vectoriel* ξ *en est un autre cocycle de recollement* (associé à d'autres trivialisations $\varphi'_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$). En effet, si $\varphi = \varphi_\xi$ correspond aux trivialisations $\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$, si l'on a les égalités (10), avec γ_α les applications (11) et qu'on pose

$$\varphi'_\alpha(b, \mathbf{x}) = \varphi_\alpha(b, \gamma_\alpha(b)\mathbf{x}), \quad b \in U_\alpha, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n,$$

on obtient $\varphi'_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$ attachées au cocycle φ'. □

On note de plus que chaque ensemble H^1 $[\mathfrak{U}; \mathscr{G})$ possède un élément distingué $[e]$, classe de cohomologie du cocycle e dont les composantes sont les applications constantes $U_\alpha \cap U_\beta \to \mathscr{G}$ qui transforment toutes l'ensemble $U_\alpha \cap U_\beta$ en l'unité e du groupe $\mathscr{G}$. Cela étant, on vérifie sans peine (le démontrer!) que *si* $\mathscr{G} = \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$, *il correspond à la classe* $[e]$ *le fibré vectoriel trivial* $\theta^n_{\mathscr{B}}$.

Remarque 2. Le théorème 1 et le procédé de construction des cocycles de recollement φ_ξ s'appliquent presque mot pour mot au cas des $\mathscr{G}$-fibrés $\xi = \xi\,[\mathscr{F}]$ quelconques, où ξ est un $\mathscr{G}$-fibré principal localement trivial arbitraire et où le groupe $\mathscr{G}$ et le $\mathscr{G}$-espace à gauche $\mathscr{F}$ sont fixés. (N'oublions pas que chaque trivialisation du fibré ξ au-dessus de U est induite par définition par une trivialisation du fibré principal ξ.) On souligne que les ensembles correspondants H^1 $(\mathfrak{U}; \mathscr{G})$ décrivant tous les fibrés $\xi\,[\mathscr{F}]$ trivialisables au-dessus du recouvrement $\mathfrak{U}$ *ne dépendent* donc *pas de* $\mathscr{F}$. Cela établit une correspondance biunivoque entre les $\mathscr{G}$-fibrés ξ et ξ' trivialisables au-dessus de chaque élément de $\mathfrak{U}$ et associés aux $\mathscr{G}$-espaces $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ différents. Cette correspondance a lieu si ξ et ξ' définissent un même élément de H^1 $(\mathfrak{U}; \mathscr{G})$. Cette propriété nous est d'ailleurs familière puisque ξ et ξ' se correspondent mutuellement en ce sens si et seulement s'ils sont associés à un même $\mathscr{G}$-fibré principal ξ.

[En d'autres termes, l'ensemble H^1 $(\mathfrak{U}; \mathscr{G})$ est en correspondance biunivoque canonique avec les classes de $\mathscr{G}$-fibrés principaux isomorphes sur $\mathscr{B}$, trivialisables au-dessus de chaque élément du recouvrement $\mathfrak{U}$.]

Remarque 3. Soit $\mathfrak{U}'$ un recouvrement plus fin que $\mathfrak{U}$. La restriction des applications définit l'application injective (pourquoi injective?) H^1 $(\mathfrak{U}; \mathscr{G}) \to H^1$ $(\mathfrak{U}'; \mathscr{G})$ qu'on considère comme plongement. On introduit donc de façon naturelle la réunion d'ensembles

H^1 ($\mathfrak{U}$; $\mathcal{G}$) par rapport à tous les recouvrements ouverts $\mathfrak{U}$ de l'espace $\mathcal{B}$. Cette réunion notée H^1 ($\mathcal{B}$; $\mathcal{G}$) est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble des classes de $\mathcal{G}$-fibrés localement triviaux isomorphes (de fibrés vectoriels de rang n si $\mathcal{G}$ = = GL (n ; K)) sur $\mathcal{B}$.

Remarque 4. Dans la suite, on se bornera aux fibrés vectoriels différentiables $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$, où les espaces $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ sont des variétés différentiables et π est une submersion (voir leçon 10). On montrera dans la leçon 18 que $\mathcal{B}$ paracompact (voir définition 1 de la leçon III.22) possède des recouvrements $\mathfrak{U}$ *trivialisations universelles* pour les fibrés vectoriels différentiables, i.e. tels que tout fibré vectoriel différentiable soit trivialisable au-dessus de $\mathfrak{U}$. Le passage à la limite de la remarque précédente s'avère en l'occurrence inutile.

LEÇON 7

$\mathcal{G}$-fibrés vectoriels. — $\mathcal{G}$-espaces vectoriels. — Quaternions. — Groupe $U^H(n)$. — Fibrés vectoriels de type $\mathcal{G}$. — Leur liaison avec les $\mathcal{G}$-fibrés principaux. — Condition de réductibilité. — Fibrés vectoriels orientables. — Fibrés vectoriels métrisables.

Soit $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ un fibré vectoriel de rang n sur un corps K, et soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe du groupe $GL(n; K)$.

Définition 1. Le fibré vectoriel ξ *est réductible au groupe* $\mathcal{G}$ s'il existe son atlas trivialisant $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tel que la matrice $\varphi_{\beta\alpha}(b)$ appartienne pour n'importe quels α, β et tout point $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ à $\mathcal{G}$ (le cocycle de recollement associé $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ est un cocycle sur le groupe $\mathcal{G}$). Ces atlas sont dits *$\mathcal{G}$-atlas*. Deux $\mathcal{G}$-atlas sont *équivalents* si leur réunion est un $\mathcal{G}$-atlas. Un fibré vectoriel pour lequel on définit la classe des $\mathcal{G}$-atlas équivalents s'appelle *$\mathcal{G}$-fibré vectoriel.*

Ainsi, *pour qu'un fibré vectoriel soit réductible au groupe $\mathcal{G}$, il faut et il suffit qu'on le munisse d'une structure de $\mathcal{G}$-fibré vectoriel.*

Cette structure n'est pas unique en général.

Exemple 1. On constate sans peine que *le fibré vectoriel ξ est réductible au sous-groupe unité $\{E\}$ si et seulement s'il est trivial.* En effet, si $\varphi_{\beta\alpha}(b) = E$ pour tous les α, β et chaque $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, la formule

$$\varphi(b, x) = \varphi_\alpha(b, x) \quad \text{si } b \in U_\alpha,$$

définit bien l'application $\varphi\colon \mathcal{B} \times K^n \to \mathcal{B}$ qui est un isomorphisme sur $\mathcal{B}$. □

Exemple 2. Quels que soient les fibrés vectoriels $\xi = (\mathcal{E}^\xi, \pi^\xi, \mathcal{B})$ et $\eta = (\mathcal{E}^\eta, \pi^\eta, \mathcal{B})$ sur $\mathcal{B}$ de rangs respectifs n et m, on considère dans le produit direct $\mathcal{E}^\xi \times \mathcal{E}^\eta$ de leurs espaces totaux le sous-espace $\mathcal{E}$ formé des couples $(p, q) \in \mathcal{E}^\xi \times \mathcal{E}^\eta$ tels que $\pi^\xi(p) = \pi^\eta(q)$. [En termes de catégories, $\mathcal{E}$ n'est autre que le *coamalgame* du diagramme $\mathcal{E}^\xi \xrightarrow{\pi^\xi} \mathcal{B} \xleftarrow{\pi^\eta} \mathcal{E}^\eta$.] Soit

$$\zeta = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B}),$$

avec π l'application $\mathcal{E} \to \mathcal{B}$ de formule $\pi(p, q) = \pi^\xi(p)$ (ou, ce qui revient au même, définie par $\pi(p, q) = \pi^\eta(q)$). La fibre $\pi^{-1}(b)$ du fibré ζ est formée pour tout point $b \in \mathcal{B}$ des couples (p, q), $p \in \mathcal{F}_b^\xi$, $q \in \mathcal{F}_b^\eta$, i.e. c'est la somme directe $\mathcal{F}_b^\xi \oplus \mathcal{F}_b^\eta$ des espaces vectoriels $\mathcal{F}_b^\xi$ et $\mathcal{F}_b^\eta$ (i.e. $\pi^{-1}(b)$ est donc un espace vectoriel). Cela

étant, quels que soient les atlas trivialisants $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha^\xi)\}$ et $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha^\eta)\}$ des fibrés ξ et η (les voisinages trivialisants U_α étant les mêmes), les applications

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times K^{n+m} \to \mathscr{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$$

définies par

$$\varphi_\alpha(b, (\mathbf{x}, \mathbf{y})) = (\varphi_\alpha^\xi(b, \mathbf{x}), \varphi_\alpha^\eta(b, \mathbf{y})), \; b \in U_\alpha, \quad \mathbf{x} \in K^n, \quad \mathbf{y} \in K^m,$$

vérifient (on le voit de suite) les conditions b_1) et b_2) de la définition 1 de la leçon 6. Le fibré ζ est donc un fibré vectoriel de rang $n + m$ (et φ_α en sont les trivialisations au-dessus de U_α). Le fibré ζ s'appelle *somme de Whitney* de ξ et η et se note $\xi \oplus \eta$. Son espace total $\mathscr{E}$ est désigné par le symbole $\mathscr{E}^\xi \oplus \mathscr{E}^\eta$.

Par définition, $\xi \oplus \eta$ *est un* GL $(n, m; K)$-*fibré vectoriel*, où GL $(n, m; K) \approx$ GL $(n; K) \times$ GL $(m; K)$ est le groupe de toutes les matrices d'ordre $n + m$

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}, \quad \begin{matrix} A \in \mathrm{GL}(n; K), \\ B \in \mathrm{GL}(m; K). \end{matrix}$$

Problème 1. *Montrer qu'un fibré vectoriel de rang $n + m$ est réductible au groupe* GL $(n, m; K)$ *si et seulement s'il est somme de Whitney de fibrés vectoriels de rang n et m respectivement.*

* * *

On se familiarise avec la notion de $\mathscr{G}$-fibré vectoriel en en appelant à l'algèbre linéaire.

On suppose toujours que $\mathscr{G}$ est un sous-groupe quelconque du groupe GL $(n; K)$.

Définition 2. Un espace vectoriel $\mathscr{V}$ de dimension n sur un corps K s'appelle *$\mathscr{G}$-espace vectoriel* si l'on définit dans $\mathscr{V}$ une classe de bases Coor $\mathscr{V}$ telle que

a) si la matrice de passage d'une base $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ à la base $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \in$ Coor $\mathscr{V}$ est $A \in \mathscr{G}$, alors $\mathbf{f} \in$ Coor $\mathscr{V}$;

b) quelles que soient les bases de Coor $\mathscr{V}$, leur matrice de passage soit dans le sous-groupe $\mathscr{G}$.

Exemple 3. Si l'on identifie Coor K^n à toutes les bases de K^n liées à la base standard $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ par une matrice de passage de $\mathscr{G}$, on confère à K^n une structure de $\mathscr{G}$-espace vectoriel qu'on appelle *structure standard*.

Une application linéaire $\varphi: \mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ de $\mathscr{G}$-espaces vectoriels s'appelle *$\mathscr{G}$-isomorphisme* si elle transforme chaque base de Coor $\mathscr{V}$ en une base de Coor $\mathscr{V}'$ (si bien qu'elle constitue en particulier un isomorphisme linéaire).

Exemple 4. Un isomorphisme linéaire $\mathcal{V} \to K^n$ est un $\mathcal{G}$-isomorphisme (par rapport à la structure standard du $\mathcal{G}$-espace K^n) si et seulement s'il est un isomorphisme de coordonnées associé à une base de Coor $\mathcal{V}$.

Soit $K = \mathbb{R}$.

Exemple 5. Si $GL^+(n ; \mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL(n ; \mathbb{R})$, dont les éléments sont des matrices de déterminant strictement positif, alors les $GL^+(n ; \mathbb{R})$-espaces vectoriels sont exactement les espaces vectoriels orientés, et les $GL^+(n ; \mathbb{R})$-isomorphismes sont les isomorphismes linéaires conservant l'orientation.

Exemple 6. Les $O(n)$-espaces vectoriels sont les espaces vectoriels euclidiens (espaces à produit scalaire défini positif), et les $O(n)$-isomorphismes en sont les isométries.

Exemple 7. Les $SO(n)$-espaces vectoriels sont les espaces vectoriels euclidiens orientés dont les isométries conservant l'orientation sont les $SO(n)$-isomorphismes.

Exemple 8. Pareillement, les $O(p, q)$-espaces vectoriels sont les espaces pseudo-euclidiens de type (p, q) dont les isométries constituent les $O(p, q)$-isomorphismes.

Exemple 9. Les $Sp(m ; \mathbb{R})$-espaces vectoriels sont les espaces symplectiques de dimension $n = 2m$, et les $Sp(m ; \mathbb{R})$-isomorphismes en sont les isomorphismes symplectiques.

Exemple 10. On appelle *structure complexe* sur un espace vectoriel réel $\mathcal{V}$ de dimension $n = 2m$ un opérateur linéaire $I : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tel que $I^2 = -E$. On établit (le faire !) que les espaces réels avec une structure complexe sont, d'une part, exactement les décomplexifiés et, de l'autre, les $\mathcal{G}$-espaces vectoriels, $\mathcal{G}$ étant un sous-groupe de $GL(n ; \mathbb{R})$ (voire de $GL^+(n ; \mathbb{R})$) qui a pour éléments toutes les matrices de la forme

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ -B & A \end{Vmatrix}$$

et qui est isomorphe au groupe $GL(n ; \mathbb{C})$.

On note que *tout espace à structure complexe est nécessairement orienté*.

Soit $K = \mathbb{C}$.

Exemple 11. Les $U(n)$-espaces vectoriels sont les espaces unitaires (voir leçon II.21) dont les isométries sont les $U(n)$-isomorphismes.

Problème 2. (Cf. problème 4 de la leçon III.11.) Montrer que l'opération $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ établit une correspondance biunivoque entre les espaces unitaires de dimension m et les espaces euclidiens $2m$-dimensionnels qui sont de même des espaces symplectiques. [*Indication.* La partie réelle du produit scalaire hermitien est le produit scalaire euclidien, et la partie imaginaire constitue le produit symplectique.]

Exemple 12. Les Sp (m)-espaces vectoriels, avec Sp (m) le groupe symplectique unitaire (voir leçon III.11), sont les espaces unitaires et symplectiques (complexes) de dimension $2m$ à la fois.

Le dernier exemple admet également une interprétation élégante en termes d'espaces vectoriels quaternioniques. Aussi force nous est d'approfondir nos connaissances en théorie des quaternions.

* * *

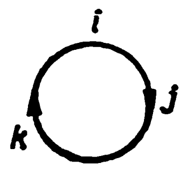
Chaque quaternion ξ s'écrit par définition

$$\xi = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \tag{1}$$

avec i, j, k les *clefs* ayant la table de multiplication suivante:

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1.

(On gagne beaucoup à représenter cette table par le schéma



Le produit de deux clefs quelconques qui se suivent dans le sens indiqué est égal à la troisième. Si l'on opère dans le sens contraire, le produit est multiplié par -1.)

L'addition des quaternions se fait composante à composante (si bien qu'ils forment un espace vectoriel de base 1, i, j, k).

Les quaternions $a_0 + a_1 i$ s'identifient aux nombres complexes, ce qui permet d'écrire chaque quaternion (1) comme

$$\xi = a + bj, \text{ où } a, b \in \mathbf{C}, \tag{2}$$

et d'identifier donc l'espace vectoriel $\mathbf{H}$ des quaternions à l'espace vectoriel $\mathbf{C}^2$ des couples (a, b) de nombres complexes. La multiplication des quaternions (2) obéit aux règles algébriques usuelles et aux relations supplémentaires

$$j^2 = -1 \text{ et } aj = j\bar{a}, \ a \in \mathbf{C}.$$

Autrement dit, elle est définie par la formule

$$(a + bj)(x + yj) = (ax - b\bar{y}) + (ay + b\bar{x})j. \tag{3}$$

Problème 3. Vérifier par un calcul direct que la multiplication définie par (3) est associative et bilinéaire, i.e. que *le vectoriel* $\mathbb{H}$ *est une algèbre associative.*

On dit que le nombre a_0, et on note Re ξ, est la *partie réelle* (ou *scalaire*) du quaternion (1). Ainsi, $\operatorname{Re} \xi = \operatorname{Re} a$ si $\xi = a + bj$, $a, b \in \mathbb{C}$.

Un quaternion $\xi = \operatorname{Re} \xi$ est dit *réel*, et il s'identifie à un nombre réel, i.e. $\operatorname{Re} \xi = a_0$.

Si $\operatorname{Re} \xi = 0$, le quaternion ξ est *imaginaire*. Tous les quaternions imaginaires forment l'espace vectoriel $\mathbb{H}'$ de dimension 3 de base i, j, k.

Problème 4. Montrer qu'un quaternion commute avec chaque $\xi \in \mathbb{H}$ (appartient au centre de l'algèbre $\mathbb{H}$) si et seulement s'il est réel.

On munit le vectoriel $\mathbb{H}$ d'une métrique euclidienne sous l'hypothèse de base $1, i, j, k$ orthonormée. Dans cette métrique, la longueur d'un quaternion ξ, notée $|\xi|$, s'appelle *norme* de ξ. Par définition

$$|\xi|^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |a|^2 + |b|^2. \tag{4}$$

En particulier, $|\xi| = 0$ si et seulement si $\xi = 0$.

Le quaternion $a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ est dit *conjugué* de (1) (on le note $\bar{\xi}$). Il est clair que $\bar{\xi} = \xi$ si et seulement si ξ est réel, et que $\bar{\xi} = -\xi$ si et seulement si ξ est imaginaire.

S'agissant du quaternion (2), son conjugué s'écrit

$$\bar{\xi} = \bar{a} - bj,$$

d'où immédiatement, en vertu de (3) et (4),

$$\xi\bar{\xi} = \bar{\xi}\xi = |\xi|^2.$$

Aussi, le quaternion $\xi^{-1} = |\xi|^{-2}\bar{\xi}$ vérifie pour $\xi \neq 0$ les égalités

$$\xi\xi^{-1} = \xi^{-1}\xi = 1.$$

Par exemple, $\xi\xi^{-1} = \xi|\xi|^{-2}\bar{\xi} = |\xi|^{-2}\xi\bar{\xi} = 1$.) Ainsi, l'*algèbre* $\mathbb{H}$ *est* par définition *un corps.*

Un calcul direct montre qu'on a pour tout ξ et tout η de $\mathbb{H}$:

$$\overline{\xi + \eta} = \bar{\xi} + \bar{\eta}, \quad \overline{\xi\eta} = \bar{\eta}\bar{\xi}$$

($\xi \mapsto \bar{\xi}$ est un *anti-automorphisme* de l'algèbre $\mathbb{H}$). Aussi, on a en particulier $|\xi\eta|^2 = \xi\eta\overline{\xi\eta} = \xi\eta\bar{\eta}\bar{\xi} = \xi|\eta|^2\bar{\xi} = \xi\bar{\xi}|\eta|^2 = |\xi|^2|\eta|^2$, donc

$$|\xi\eta| = |\xi||\eta|. \tag{5}$$

On pose pour $\xi = a + bj$ quelconque :

(6) $$A_\xi = \begin{Vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{Vmatrix}.$$

Problème 5. *Montrer que la correspondance* $\xi \mapsto A_\xi$ *est un homomorphisme de l'algèbre* $\mathbb{H}$ *dans l'algèbre* $\mathrm{Mat}_2\,\mathbb{C}$ *des matrices complexes carrées d'ordre* 2, *qui constitue un isomorphisme sur la sous-algèbre de toutes les matrices de la forme* (6).

Aussi, toutes les propriétés des quaternions s'interprètent comme celles des matrices. Le carré de la norme $|\xi|^2 = a\bar{a} + b\bar{b}$ d'un quaternion ξ n'est autre, par exemple, que le déterminant $\det A_\xi$ de la matrice A_ξ (à propos, cela prouve une deuxième fois la formule (5)), et $\operatorname{Re} \xi = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A_\xi$. On peut donc identifier ξ à A_ξ.

* * *

On appelle *multiplication scalaire* sur l'espace vectoriel quaternionique à droite $\mathcal{V}$ une application $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{H}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{ab}$ telle que

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\,\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\mathbf{b} + \mathbf{a}_2\mathbf{b}, \quad \mathbf{a}\,(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{ab}_1 + \mathbf{ab}_2$$

quels que soient les vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathcal{V}$;

$$(\mathbf{a}\lambda)\mathbf{b} = \bar{\lambda}\,(\mathbf{ab}), \quad \mathbf{a}\,(\mathbf{b}\lambda) = (\mathbf{ab})\,\lambda$$

pour tout $\mathbf{a}$ et tout $\mathbf{b}$ de $\mathcal{V}$ et chaque quaternion $\lambda \in \mathbb{H}$;

$$\mathbf{ba} = \overline{\mathbf{ab}}$$

pour n'importe quels vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$.

Un espace quaternionique $\mathcal{V}$ avec le produit scalaire $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{ab}$ donné s'appelle *espace euclidien quaternionique*. (On l'appelle également *espace symplectique*, terme qui désigne dans ce livre les espaces à produit antisymétrique non dégénéré.) Une base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ d'un espace euclidien quaternionique est dite *orthonormée* si $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ pour tous les $i, j = 1, \ldots, n$. Une application linéaire $\mathcal{V} \to \mathcal{V}_1$ d'espaces euclidiens quaternioniques qui conserve le produit scalaire est un *isomorphisme* (ou une *isométrie*).

L'espace $\mathbb{H}^n$ muni de la multiplication scalaire

$$\mathbf{ab} = \bar{a}^1 b^1 + \ldots + \bar{a}^n b^n,$$

où $\mathbf{a} = (a^1, \ldots, a^n) \in \mathbb{H}^n$, $\mathbf{b} = (b^1, \ldots, b^n) \in \mathbb{H}^n$, est un exemple d'espace euclidien quaternionique de dimension n. [On assimile les éléments de $\mathbb{H}^n$ à des lignes, encore que ce soit des colonnes.]

[On remarque que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la définition correspondante diffère par la conjugaison complexe (ce qui n'a d'ailleurs aucune importance).]

Problème 6. Montrer qu'une base $e_1, \ldots, e_n$ d'un espace euclidien quaternionique $\mathcal{V}$ est orthonormée si et seulement si l'isomorphisme de coordonnées $\mathcal{V} \to H^n$ (qui envoie le vecteur $a = e_i a^i$ de $\mathcal{V}$ en le vecteur $(a^1, \ldots, a^n)$ de H^n) est une isométrie.

Toutes les isométries $H^n \to H^n$ de H^n sur lui-même forment un groupe noté $U^H(n)$. Si l'on identifie chaque isométrie $H^n \to H^n$ à la matrice à colonnes les images des vecteurs de la base standard, on regarde les éléments de $U^H(n)$ comme matrices quaternioniques.

Problème 7. Montrer qu'une matrice quaternionique A est dans le groupe $U^H(n)$ si et seulement si

$$\overline{A}^{T} A = E,$$

avec $\overline{A}^{T}$ la transposée de A dont tous les éléments sont remplacés par leurs conjugués quaternioniques. (Cf. proposition 2 de la leçon II. 21.)

Problème 8. Montrer que $U^H(n)$ est un groupe de Lie de matrices (voir leçon III.11) dont l'algèbre de Lie est l'espace $\mathfrak{u}^H(n)$ des matrices quaternioniques B telles que

$$B + \overline{B}^{T} = 0.$$

Problème 9. Montrer que $A \in U^H(n)$ si et seulement si A est la matrice de passage d'une base orthonormée de H^n à une autre.

Cela donne de suite les résultats suivants.

Exemple 13. Les $U^H(n)$-espaces quaternioniques $\mathcal{V}$ sont exactement les espaces euclidiens quaternioniques (dont Coor $\mathcal{V}$ est la classe de toutes les bases orthonormées).

Puisqu'on identifie H à C^2 et, partant, H^n à C^{2n}, le produit scalaire dans H^n définit par

$$\mathbf{ab} = S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + j\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

deux fonctionnelles S et Ω sur C^{2n}.

Problème 10. Montrer que, sur C^{2n}, S est la multiplication scalaire hermitique et que Ω est la multiplication symplectique. Cela étant, montrer que les espaces euclidiens quaternioniques de dimension n sont exactement les espaces complexes $2n$-dimensionnels qui sont unitaires et symplectiques à la fois. (Cf. problème 2.)

Il en découle en particulier que $U^H(n)$ *est isomorphe au groupe symplectique* Sp (n).

Problème 11. Expliciter l'isomorphisme $U^H(n) \to \mathrm{Sp}(n)$ (cf. problème 4 de la leçon III.11).

Cet isomorphisme fait que les deux groupes s'identifient d'ordinaire. [En particulier, le groupe $U^H(n)$ est dit *symplectique* et se note Sp (n).]

* * *

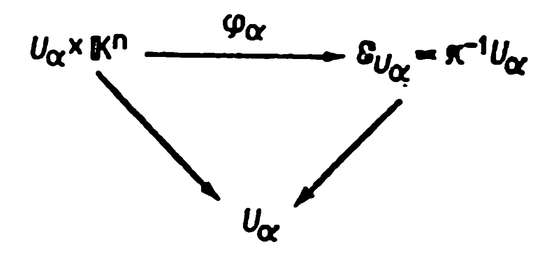
Revenons aux fibrés vectoriels.

Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe quelconque de GL (n ; $\mathbb{K}$).

Définition 3. Un fibré vectoriel $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ de rang n sur $\mathbb{K}$ est dit *de type* $\mathcal{G}$ si

a) chaque fibre $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in \mathcal{B}$, de ξ est un $\mathcal{G}$-espace vectoriel ;

b) il existe un atlas trivialisant $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$



de ξ tel que l'application

(7) $$\varphi_{\alpha, b} : \mathbb{K}^n \to \mathcal{F}_b, \quad x \mapsto \varphi_\alpha(b, x), \quad x \in \mathbb{K}^n,$$

soit pour tout α et tout $b \in U_\alpha$ un $\mathcal{G}$-isomorphisme.

En particulier, sont de type $\mathcal{G}$:

1) *les fibrés vectoriels orientés* (pour lesquels les fibres $\mathcal{F}_b$ sont orientées et les isomorphismes (7) conservent l'orientation),

2) *les fibrés vectoriels euclidiens* (pour lesquels les fibres $\mathcal{F}_b$ sont à métrique euclidienne et les isomorphismes (7) sont des isométries),

3) *les fibrés vectoriels pseudo-euclidiens,*

4) *les fibrés vectoriels symplectiques,*

5) *les fibrés vectoriels unitaires,*

6) *les fibrés vectoriels euclidiens quaternioniques,* et ainsi de suite.

On a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour les classes 1), 2), 3) ; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ pour 4) ; $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ pour 5) et $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ pour 6). Cela étant, on identifie les fibrés 5) aux fibrés réels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) qui sont euclidiens et symplectiques à la fois, et les fibrés de la classe 6) s'assimilent aux fibrés complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) qui sont simultanément unitaires et symplectiques.

Il existe entre les fibrés vectoriels de type $\mathcal{G}$ et les fibrés réductibles à $\mathcal{G}$ un lien décrit par la

Proposition 1. *Un fibré vectoriel est réductible au groupe $\mathcal{G}$ si et seulement s'il se structure en fibré de type $\mathcal{G}$.*

Démonstration. On suppose que le fibré vectoriel $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ est de type $\mathcal{G}$. Soit $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlas trivialisant soumis à la condition b) de la définition 3.

Chaque application $\varphi_{\beta\alpha}(b) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ étant une composée de $\mathcal{G}$-isomorphismes est un $\mathcal{G}$-isomorphisme, i.e. sa matrice est dans le groupe $\mathcal{G}$. Cela prouve que tout fibré vectoriel de type $\mathcal{G}$ est réductible à $\mathcal{G}$ (c'est donc un $\mathcal{G}$-fibré).

Réciproquement, si le fibré vectoriel $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ est réductible à $\mathscr{G}$ et que $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ soit un $\mathscr{G}$-atlas quelconque de ξ, chaque trivialisation φ_α définit une base

(8) $$\varphi_\alpha(b, e_1), \ldots, \varphi_\alpha(b, e_n)$$

de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_b$, $b \in U_\alpha$, avec $e_1, \ldots, e_n$ la base standard de K^n (voir leçon 6), et les bases (8) associées aux trivialisations φ_α et φ_β sont liées pour chaque point $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ par la matrice de passage $\varphi_{\beta\alpha}(b) \in \mathscr{G}$. Aussi, la structure de $\mathscr{G}$-espace définie dans $\mathscr{F}_b$ par la base (8) (i.e. telle que Coor $\mathscr{F}_b$ contienne toutes les bases liées à (8) par les matrices de passage de $\mathscr{G}$) ne dépend pas du choix du voisinage U_α du point b. L'application $\varphi_{\alpha, b}$ est certes un $\mathscr{G}$-isomorphisme par rapport à cette structure, si bien que ξ se trouve muni d'une structure de fibré vectoriel de type $\mathscr{G}$. □

Ainsi, *la structure de $\mathscr{G}$-fibré vectoriel et la structure de fibré de type $\mathscr{G}$ définies sur tout fibré vectoriel ξ sont en correspondance biunivoque.* Nous ne les distinguons donc pas et nous considérons comme synonymes le terme « $\mathscr{G}$-fibré vectoriel » et le terme « fibré de type $\mathscr{G}$ ».

* * *

Les $\mathscr{G}$-fibrés vectoriels sont caractérisés aisément en termes de $\mathscr{G}$-fibrés principaux.

En effet, il est clair (voir exemple 3 de la leçon 6) que *le fibré $\xi[K^n]$ associé à tout $\mathscr{G}$-fibré principal localement trivial ξ est un $\mathscr{G}$-fibré vectoriel* (on interprète K^n comme $\mathscr{G}$-espace à gauche). Il se trouve que la réciproque est également juste, i.e. *chaque $\mathscr{G}$-fibré vectoriel ξ s'écrit $\xi[K^n]$, avec ξ un $\mathscr{G}$-fibré principal localement trivial.* On le démontre en répétant en fait la démonstration de la proposition 2 de la leçon 6.

Problème 12. Démontrer la dernière affirmation.

* * *

Cela permet d'établir une condition nécessaire et suffisante (qu'on vérifie aisément) pour qu'un fibré vectoriel donné soit réductible au groupe $\mathscr{G}$ (ou, de façon plus générale, pour qu'un $\mathscr{G}$-fibré vectoriel donné le soit à un sous-groupe $\mathscr{H}$ de $\mathscr{G}$).

On suppose $\mathscr{H}$ fermé et on introduit l'espace $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ des classes à gauche $a\mathscr{H}$ de $\mathscr{G}$ suivant $\mathscr{H}$ (voir exemple 2 de la leçon 1). L'action (non effective en général !) de $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ est donnée par la formule

$$g(a\mathscr{H}) = (ga)\mathscr{H}, \quad g, a \in \mathscr{G},$$

si bien qu'on définit pour tout $\mathscr{G}$-fibré principal ξ le fibré associé $\xi[\mathscr{G}/\mathscr{H}]$.

On suppose ξ (donc $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$) localement trivial.

Proposition 2. *Si un $\mathcal{G}$-fibré vectoriel $\xi = \xi[\mathbb{K}^n]$ est réductible au sous-groupe $\mathcal{H}$, le fibré $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$ admet une section.*

Démonstration. Soient $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un $\mathcal{H}$-atlas trivialisant de ξ et $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ le cocycle de recollement correspondant. On estime sans perte de généralité que le fibré $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ (et, partant, le fibré $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$) est trivial au-dessus des voisinages U_α. Soient

$$\psi_\alpha: U_\alpha \times \mathcal{G} \to \mathcal{E}_{U_\alpha}$$

les trivialisations correspondantes, et soit $\{\psi_{\beta\alpha}\}$ le cocycle de recollement associé sur le groupe $\mathcal{G}$. Ce cocycle est cohomologue par hypothèse au cocycle $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ (considéré comme cocycle sur $\mathcal{G}$), i.e. il existe des applications $h_\alpha : U_\alpha \to \mathcal{G}$ telles que

$$\varphi_{\beta\alpha}(b) = h_\beta^{-1}(b)\, \psi_{\beta\alpha}(b)\, h_\alpha(b)$$

pour tout point $b \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Comme $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$ est associé au fibré ξ, il admet par construction l'atlas trivialisant $\{(U_\alpha, \omega_\alpha)\}$ auquel il correspond le même $\{\psi_{\beta\alpha}\}$. Cela étant, on note $[a]$ la classe $a\mathcal{H}$, $a \in \mathcal{G}$ (on allège ainsi les formules) et on fait correspondre à b quelconque de $\mathcal{B}$ le point $s(b)$ de l'espace total $\mathcal{E}$ du fibré $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$. On pose à cet effet

$$s(b) = \omega_\alpha(b, [h_\alpha(b)]) \quad \text{si } b \in U_\alpha.$$

D'après la définition d'un cocycle de recollement,

$$\omega_\beta(b, \psi_{\beta\alpha}(b)[a]) = \omega_\alpha(b, [a])$$

pour n'importe quels points $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ et $[a] \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$. D'autre part, $[\varphi_{\beta\alpha}(b)] = [e]$ par hypothèse, si bien que

$$[h_\beta(b)] = \psi_{\beta\alpha}(b)[h_\alpha(b)].$$

Aussi

$$\omega_\beta(b, [h_\beta(b)]) = \omega_\alpha(b, [h_\alpha(b)]),$$

et l'application $s: \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ est définie parfaitement.

Comme s est évidemment une section de $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$, la proposition 2 se trouve démontrée. □

La réciproque n'est en général juste que sous certaines hypothèses supplémentaires.

Problème 13. Démontrer que *si le fibré canonique $\mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ est localement trivial, réciproquement, l'existence d'une section de $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$ entraîne la propriété de $\xi = \xi[\mathbb{K}^n]$ d'être réductible au groupe $\mathcal{H}$.*

Problème 14. Montrer que *si $\mathcal{G}$ est un groupe de Lie dont $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de Lie fermé, le fibré $\mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ est localement trivial.* [*Indication.* Un sous-groupe de Lie fermé est une variété plongée; voir leçon 13.]

* * *

Si $\mathcal{G} = \mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$ et $\mathcal{H} = \mathrm{GL}^+(n;\ \mathbb{R})$, l'espace quotient $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ est formé de deux points. Aussi, le fibré $\xi\,[\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})/\mathrm{GL}^+(n;\ \mathbb{R})]$ est pour tout $\mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$-fibré principal ξ ou bien trivial, ou bien un revêtement à deux feuillets (si la base $\mathcal{B}$ de ξ est supposée connexe). Dans le premier cas, le fibré vectoriel $\xi = \xi\,[\mathbb{R}^n]$ est réductible au groupe $\mathrm{GL}^+(n;\ \mathbb{R})$ (on l'appelle *fibré orientable*), et, dans le deuxième, il ne l'est pas.

Problème 15. Montrer que *le fibré tangent $\tau\mathcal{X}$ sur une variété différentiable $\mathcal{X}$ est orientable si et seulement s'il en est ainsi pour $\mathcal{X}$* (au sens de la définition 1 de III.25).

* * *

Un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel ξ est dit *métrisable* si on lui confère une structure de fibré euclidien (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), de fibré unitaire (pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ou de fibré euclidien quaternionique (pour $\mathbb{K} = \mathbb{H}$), i.e. s'il est réductible aux groupes $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n) = \mathrm{Sp}(n)$ respectivement. Chaque structure est dans ce cas une *métrique* sur ξ.

A la différence de la propriété d'orientabilité, la propriété d'être muni d'une métrique est celle de tout fibré vectoriel soumis à certaines conditions très larges qui sont vérifiées dans toutes les situations d'un intérêt géométrique certain. Il y a avantage à le démontrer de façon directe sans s'adresser à la proposition 2 (ou, plus précisément, au problème 13).

On rappelle (voir définition 1 de III.22 et remarque 4 de III.24) qu'un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de l'espace $\mathcal{B}$ est dit *numérotable* s'il existe une *partition de l'unité* qui lui est subordonnée, i.e. s'il existe une famille de fonctions positives continues $\eta_\alpha : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ telle que

1° tout point $b \in \mathcal{B}$ possède un voisinage U où η_α non nulles sont en nombre fini (*propriété d'être localement fini*);

2° on ait

$$\sum_\alpha \eta_\alpha = 1$$

(la somme est définie par suite de 1°);

3° $\eta_\alpha = 0$ à l'extérieur de U_α quel que soit α (*condition de subordination*).

Un espace topologique $\mathcal{B}$ dont chaque recouvrement ouvert est numérotable est dit *paracompact*. (La définition est un peu plus forte que la définition universellement admise, mais elles coïncident s'il s'agit d'un espace séparé; voir remarques 1 et 4 de III.24.)

Un fibré vectoriel ξ est *numérotable* s'il admet un recouvrement

trivialisant numérotable. Ainsi, *tout fibré vectoriel sur un espace paracompact $\mathscr{B}$ est numérotable.*

Proposition 3. *Chaque fibré vectoriel numérotable est métrisable.*

La démonstration sera précédée de plusieurs résultats simples sur les métriques.

La multiplication scalaire (la métrique) sur un espace vectoriel $\mathscr{V}$ est univoquement reconstituée à partir de la fonctionnelle quadratique définie positive correspondante $Q : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^2$, $\mathbf{x} \in \mathscr{V}$. (Si $\mathsf{K} = \mathbb{R}$ et $\mathsf{K} = \mathsf{C}$, on le sait depuis les leçons II.11 et II.18. Dans le cas $\mathsf{K} = \mathsf{H}$, on procède comme pour $\mathsf{K} = \mathsf{C}$. Chose à noter, on dit « fonctionnelle quadratique » pour abréger, bien que cela ne soit rigoureusement parlant vrai que pour $\mathsf{K} = \mathbb{R}$.)

On observe que quel que soit le corps K, Q prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Problème 16. Montrer que quels que soient la famille finie de fonctionnelles quadratiques définies positives Q_α et les nombres positifs η_α dont l'un au moins est non-nul,

$$Q = \sum \eta_\alpha Q_\alpha$$

est une fonctionnelle quadratique définie positive.

La formule

$$Q(p) = p^2, \; p \in \mathscr{E}$$

(avec p^2 le carré scalaire du vecteur p dans $\mathscr{F}_b$, $b = \pi(p)$) définit pour chaque fibré vectoriel $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ muni d'une métrique une fonction $Q: \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ (évidemment continue) telle que sa restriction à chaque fibre $\mathscr{F}_b$, $b \in \mathscr{B}$, soit une fonctionnelle quadratique définie positive sur le vectoriel $\mathscr{F}_b$.

Le lemme suivant est une clé qui permet de démontrer la proposition 3.

Lemme 1. *Chaque fonction continue $Q: \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ dont la restriction à toute fibre $\mathscr{F}_b$, $b \in \mathscr{B}$, est une fonctionnelle quadratique définie positive, est reconstituée à partir d'une métrique sur ξ.*

D é m o n s t r a t i o n. La fonction Q définit par hypothèse sur chaque fibre $\mathscr{F}_b$, $b \in \mathscr{B}$, une structure d'espace vectoriel euclidien (pour $\mathsf{K} = \mathbb{R}$), unitaire (pour $\mathsf{K} = \mathsf{C}$) ou euclidien quaternionique (pour $\mathsf{K} = \mathsf{H}$). Aussi, il ne faut démontrer que l'existence d'un atlas trivialisant $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de ξ tel que toutes les applications (7) soient des isométries.

Soit $\{(U_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$ un atlas trivialisant arbitraire du fibré ξ. Il est connu (voir leçon 6) que chaque trivialisation φ'_α définit une base du $\mathsf{F}U_\alpha$-module $\Gamma(\xi|_{U_\alpha})$ de composantes les sections

$$s'_i : b \mapsto \varphi'_\alpha(b, \mathbf{e}_i), \; i = 1, \ldots, n.$$

On applique aux valeurs $s'_1(b), \ldots, s'_n(b)$ en chaque point $b \in U_\alpha$ le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (voir leçon

I.14 ; ce procédé travaille (le démontrer !) non seulement pour $K = R$, mais aussi pour $K = H$ ou $K = C$), et on obtient les sections (continues, ce qui est établi facilement) $s_1, \ldots, s_n$ du fibré ξ au-dessus de U_α qui forment une base du FU_α-module $\Gamma(\xi \mid_{U_\alpha})$ telle que les vecteurs $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ constituent pour chaque $b \in U_\alpha$ une base orthonormée du vectoriel $\mathcal{F}_b$.

Il reste à remarquer que la dernière propriété équivaut à dire que s'agissant de la trivialisation $\varphi_\alpha : U \times K^n \to \mathcal{E}_{U_\alpha}$ associée à la base $s_1, \ldots, s_n$, toutes les applications (7) sont des isométries.

Passons à la

D é m o n s t r a t i o n de la proposition 3. Le fibré $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ possède par hypothèse l'atlas trivialisant $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ et la partition de l'unité $\{\eta_\alpha\}$ subordonnée au recouvrement $\{U_\alpha\}$.

On définit sur $\mathcal{E}$ une fonction $Q : \mathcal{E} \to R$ en posant

$$Q(p) = \sum_\alpha \eta_\alpha(\pi(p)) Q_\alpha(p), \ p \in \mathcal{E},$$

avec Q_α la fonction $\mathcal{E}_{U_\alpha} \to R$ donnée par

$$Q_\alpha(p) = \mathbf{x}^2 \quad \text{si } \varphi_\alpha(b, \mathbf{x}) = p.$$

Ici $b = \pi(p)$ et $\mathbf{x}^2$ est le carré scalaire du vecteur $\mathbf{x} \in K^n$ dans la métrique standard sur K^n.

On voit aisément que Q est continue et que sa restriction à chaque fibre $\mathcal{F}_b$, $b \in \mathcal{B}$, est une fonctionnelle quadratique définie positive (voir problème 10). Aux termes du lemme 1, cette fonction définit donc sur ξ une métrique. □

Corollaire 1. *Tout fibré vectoriel sur un espace paracompact $\mathcal{B}$ est métrisable.* □

LEÇON 8

Variétés presque complexes. — Variété des matrices orthogonales antisymétriques. — Une condition d'existence d'une variété presque complexe. — Sphères admettant une structure presque complexe. — Algèbre des octaves. — La sphère S^6 et la structure presque complexe. — Variétés presque complexes de dimension 6. — Parallélisme sur les quasi-groupes. — Algèbres réelles à division.

Les fibrés de type $\mathcal{G}$, avec $\mathcal{G}$ un sous-groupe de GL $(n; \mathbb{R})$, $n = 2m$, de la leçon 7 (exemple 10) sont exactement les décomplexifiés.

Définition 1. Une variété différentiable $\mathcal{X}$ de dimension n, $n = 2m$, *admet une structure presque complexe* si son fibré tangent $\tau_{\mathcal{X}}$ est réductible au groupe $\mathcal{G}$ de l'exemple 10 de la leçon 7, i.e. s'il existe sur $\mathcal{X}$ un fibré complexe τ de rang m tel que

$$\tau_{\mathcal{X}} = \tau^{\mathsf{R}}.$$

Chaque fibré τ constitue une *structure presque complexe* sur $\mathcal{X}$, et munie d'une structure τ donnée, $\mathcal{X}$ s'appelle *variété presque complexe*.

Chaque variété à structure presque complexe est certes *orientable* (voir problème 15 de la leçon 7).

Un exemple évident de variété presque complexe est (voir leçon III.11) le décomplexifié $\mathfrak{Z}^{\mathsf{R}}$ d'une variété analytique complexe $\mathfrak{Z}$ quelconque (si $\mathcal{X} = \mathfrak{Z}^{\mathsf{R}}$, alors $\tau_{\mathcal{X}} = \tau_{\mathfrak{Z}}^{\mathsf{R}}$). Aussi, la propriété de $\mathcal{X}$ d'admettre une structure presque complexe est une condition nécessaire (mais non suffisante en général !) pour que $\mathcal{X}$ *possède un complexifié*, i.e. pour qu'il existe une variété analytique complexe $\mathfrak{Z}$ telle que $\mathfrak{Z}^{\mathsf{R}} = \mathcal{X}$.

Les structures presque complexes sur $\mathcal{X}$ ne sont certes autres que les structures complexes (voir leçon 6) sur le fibré tangent $\tau_{\mathcal{X}}$. Aussi, elles sont en correspondance biunivoque canonique avec les automorphismes

$$(1) \qquad I : \tau_{\mathcal{X}} \to \tau_{\mathcal{X}}$$

pour lesquels $I^2 = -\mathrm{id}$.

Aussi, les automorphismes (1) soumis à cette condition ou (ce qui revient au même) les champs différentiables $p \mapsto I_p$, $p \in \mathcal{X}$, d'opérateurs $I_p \colon \mathrm{T}_p\mathcal{X} \to \mathrm{T}_p\mathcal{X}$, où $I_p^2 = -\mathrm{id}$, constituent eux aussi des *structures presque complexes* sur $\mathcal{X}$.

Conformément au corollaire 1 de la proposition 3, leçon 7, si $\mathcal{X}$ presque complexe est paracompacte, le fibré τ est à métrique

hermitienne dont la partie réelle est la métrique euclidienne et la partie imaginaire, la métrique symplectique sur $\tau_{\mathscr{X}}$. Aussi, *une variété différentiable paracompacte admet une structure presque complexe si et seulement si le fibré* $\tau_{\mathscr{X}}$ *est réductible au sous-groupe* Sp (m) = = SO $(2m) \cap$ Sp $(m; \mathbb{R})$ *du groupe* SO (n), $n = 2m$ (image de U (m) par l'injection GL $(m; \mathbb{C}) \to$ GL $(n; \mathbb{R})$). Par conséquent (voir leçon 7, proposition 2 et problèmes 10 et 11), le problème de savoir si $\mathscr{X}$ paracompacte admet une structure presque complexe se ramène à établir l'existence d'une section du fibré de fibre SO $(2m)$/Sp (m) associé au fibré vectoriel $\tau_{\mathscr{X}}$. Voyons donc de plus près l'espace quotient SO $(2m)$/Sp (m).

* * *

Problème 1. Montrer que l'espace SO $(2m)$/Sp (m) possède une structure de variété différentiable qui fait de l'application canonique π : SO $(2m) \to$ SO $(2m)$/Sp (m) une submersion (si bien que les classes du groupe SO $(2m)$ suivant le sous-groupe Sp (m) sont des sous-variétés plongées). [*Indication.* Le voisinage de l'unité de SO$(2m)$ contient une sous-variété transverse à Sp (m) dans laquelle π est un homéomorphisme sur un ouvert de l'espace SO $(2m)$/Sp (m). Cf. problème 4 de la leçon 15.]

Soit W_m un sous-ensemble de SO $(2m)$ à éléments les matrices antisymétriques. Puisque toute matrice antisymétrique a son déterminant positif, *une matrice A d'ordre $2m$ appartient à W_m si et seulement si elle est orthogonale et antisymétrique.*

Problème 2. Montrer que W_m *est une variété différentiable connexe de dimension $m^2 - m$.*

Problème 3. La matrice A est assujettie à être

1° antisymétrique,

2° orthogonale,

3° telle que

$$A^2 = -E. \tag{2}$$

Démontrer que deux quelconques de ces conditions impliquent la troisième.

Ainsi, on a ce résultat particulier: *chaque matrice $A \in W_m$ jouit de la propriété* (2).

Quelle que soit $A \in$ SO $(2m)$, la matrice $AJA^{\top}$, où

$$J = \left\| \begin{matrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{matrix} \right\|.$$

est orthogonale et antisymétrique. Aussi, la formule

$$\varphi(A) = AJA^{\top}$$

détermine une application (évidemment différentiable)

(3) $$\varphi : SO(2m) \to W_m.$$

Par définition (voir leçon III.11), une matrice A de SO $(2m)$ appartient au sous-groupe Sp (m) si et seulement si $A^{\top}JA = J$, i.e. si $\varphi(A) = J$ vu que

$$AJA^{\top} = -((A^{-1})^{\top}JA^{-1})^{-1}.$$

Comme

(4) $$\varphi(AB) = A\varphi(B)A^{\top}$$

pour n'importe quelles A et B de SO $(2m)$, il en résulte de suite que $\varphi(A) = \varphi(B)$ si et seulement si $A^{-1}B \in$ Sp (m). Par conséquent,

$$\bar{\varphi}[A] = \varphi(A),$$
$$A \in SO(2m),\ [A] = A\,Sp(m) \in SO(2m)/Sp(m),$$

définit complètement une application (qui est différentiable elle aussi !)

$$\bar{\varphi} : SO(2m)/Sp(m) \to W_m.$$

C'est une injection. Comme SO $(2m)$/Sp (m) est une variété compacte, $\bar{\varphi}$ constitue de plus un monéomorphisme (un homéomorphisme sur son image).

Problème 4. Montrer que l'espace tangent $\mathbf{T}_E$SO (n) en E du groupe SO (n) (resp. espace tangent $\mathbf{T}_E$ Sp (m) en E du groupe Sp (m)) s'identifie naturellement à l'espace vectoriel $\mathfrak{so}(n)$ (resp. espace vectoriel $\mathfrak{sp}(m)$) formé de toutes les matrices antisymétriques d'ordre n (resp. de toutes les matrices antisymétriques d'ordre $2m$ permutables avec la matrice J), i.e. à l'algèbre de Lie du groupe concerné au sens de III.11. [*Indication.* Chaque matrice d'un voisinage de E du groupe SO (n) s'écrit e^{tA}, où $A \in \mathfrak{so}(n)$, et $e^{tA} \in$ Sp (m), $n = 2m$, si et seulement si $A \in \mathfrak{sp}(m)$.]

On identifie de même l'espace tangent $\mathbf{T}_J W_m$ en J de la variété W_m au sous-espace de $\mathfrak{so}(n)$ formé des matrices antisymétriques A telles que $AJ + JA = 0$.

On assimile donc la différentielle $(d\varphi)_E$ en E de φ à l'application

$$(d\varphi)_E : \mathfrak{so}(n) \to \mathbf{T}_J W_m \subset \mathfrak{so}(n).$$

Comme toute matrice A de $\mathfrak{so}(n)$ vérifie l'égalité

$$\frac{e^{tA}J(e^{tA})^{\top} - J}{t} = \frac{(E + t(A + \ldots))J(E + t(A^{\top} + \ldots)) - J}{t} =$$
$$= AJ - JA + \ldots,$$

où les points de suspension désignent des termes de degré $\geqslant 1$ en t (on rappelle que $A^{\top} = -A$), l'application $(d\varphi)_E$ est définie par

$$(d\varphi)_E A = AJ - JA.$$

Son noyau est donc le sous-espace $\mathfrak{sp}(m)$, ce qui entraîne de suite que $\overline{\varphi}$ est une immersion (en $[E]$ et, partant, en tout point de SO $(2m)$/Sp (m); le dernier résultat découle immédiatement de (4)). L'image $\overline{\varphi}$ (SO $(2m)$/Sp (m)) de $\overline{\varphi}$ représente par conséquent une sous-variété compacte (donc fermée) de W_m, dont la dimension est égale à la dimension $m^2 - m$ de W_m.

Lemme 1. *Soit $\mathcal{Y}$ une sous-variété fermée de la variété $\mathcal{X}$. Si* $\dim \mathcal{Y} = \dim \mathcal{X}$ *et si $\mathcal{X}$ est connexe, alors $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$.*

D é m o n s t r a t i o n. Comme $\dim \mathcal{Y} = \dim \mathcal{X}$, l'injection $\iota : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ est une application étale (difféomorphisme local). Aussi, $\mathcal{Y}$ contient un voisinage V de tout $p \in \mathcal{Y}$ tel que son image $\iota(V) = V$ soit un voisinage dans $\mathcal{X}$ du point $\iota(p) = p$. Cela veut dire que $\mathcal{Y}$ est ouverte dans $\mathcal{X}$. Comme $\mathcal{X}$ est connexe et $\mathcal{Y}$ fermée, cette propriété ne peut avoir lieu que si $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$. □

Aux termes de ce lemme, la sous-variété $\overline{\varphi}$ (SO $(2m)$/Sp (m)) coïncide avec W_m, i.e. *l'application $\overline{\varphi}$ est un difféomorphisme.*

Dans la suite, on identifie W_m et SO $(2m)$/Sp (m) par le difféomorphisme $\overline{\varphi}$.

On remarque que les translations à gauche $[B] \mapsto [AB]$ de $A \in$ $\in$ SO $(2m)$ de l'espace SO $(2m)$/Sp (m) deviennent par ces identifications les conjugaisons $C \mapsto ACA^{-1}$, $C \in W_m$.

* * *

Revenons à la variété $\mathcal{X}$ de dimension n $(n = 2m)$. On suppose $\mathcal{X}$ paracompacte et on munit son fibré tangent $\tau_{\mathcal{X}}$ d'une métrique euclidienne arbitraire. Cela équivaut, on le sait, à réduire $\tau_{\mathcal{X}}$ au groupe O (n). Si $\mathcal{X}$ est orientable, $\tau_{\mathcal{X}}$ est réductible même à SO (n). Soit $\tau_{\mathcal{X}}$ le SO (n)-fibré principal associé.

Comme le groupe SO (n) opère pour $n = 2m$ à gauche sur W_m, on définit le fibré $\tau_{\mathcal{X}}[W_m]$ de fibre-type W_m.

D'autre part, tous les espaces tangents $\mathbf{T}_p\mathcal{X}$ sont orientés et euclidiens, si bien qu'on définit sur $\mathcal{X}$ un fibré $\sigma_{\mathcal{X}}$ dont la fibre au-dessus de chaque point $p \in \mathcal{X}$ est l'espace de tous les opérateurs orthogonaux et antisymétriques $\mathbf{T}_p\mathcal{X} \to \mathbf{T}_p\mathcal{X}$, i.e. (cf. prob. 3) l'espace de tous les opérateurs orthogonaux et unimodulaires I_p: $\mathbf{T}_p\mathcal{X} \to \mathbf{T}_p\mathcal{X}$ tels que $I_p^2 = -\mathrm{id}$ (ce sont les structures complexes orthogonales sur $\mathbf{T}_p\mathcal{X}$).

Problème 5. Montrer que *les fibrés $\tau_{\mathcal{X}}[W_m]$ et $\sigma_{\mathcal{X}}$ sont isomorphes.*

Puisque les sections de $\sigma_{\mathcal{X}}$ sont exactement les champs $p \mapsto I_p$ de structures complexes orthogonales I_p: $\mathbf{T}_p\mathcal{X} \to \mathbf{T}_p\mathcal{X}$, cela démontre la

Proposition 1. *Une variété paracompacte orientable $\mathcal{X}$ de dimension $2m$ (dont le fibré $\tau_{\mathcal{X}}$ est muni d'une métrique euclidienne) admet*

une structure presque complexe si et seulement s'il existe sur $\mathscr{X}$ *un champ* $p \mapsto I_p$ *de structures complexes orthogonales (opérateurs orthogonaux antisymétriques* $I_p : \mathbf{T}_p\mathscr{X} \to \mathbf{T}_p\mathscr{X}$*) ou, autrement dit, une structure complexe*

$$I : \tau_{\mathscr{X}} \to \tau_{\mathscr{X}} \tag{5}$$

qui constitue également une isométrie (dans chaque fibre de $\tau_{\mathscr{X}}$*).* □

Remarque 1. Il paraît à première vue que la démonstration aurait pu être sensiblement plus simple. En effet, si τ est une structure presque complexe sur $\mathscr{X}$, l'automorphisme correspondant (1) est manifestement une isométrie pour la métrique euclidienne associée à une métrique hermitienne arbitraire sur τ (voir plus haut). Mais le fait est qu'il existe un automorphisme (1), isométrie pour une métrique euclidienne *quelconque* donnée à l'avance sur $\tau_{\mathscr{X}}$ qu'on ne saurait déduire en général d'aucune métrique hermitienne sur τ.

Si $n = 2$, le groupe Sp (1) coïncide, on le constate aisément, avec SO (2). Aussi, *une variété paracompacte de dimension 2 (une surface) admet une structure presque complexe si et seulement si elle est orientable.*

On montrera en temps voulu qu'en fait toute surface orientable admet même une structure complexe.

* * *

Si $n > 2$, l'orientabilité ne garantit pas l'existence d'une structure presque complexe. Les sphères S^n, $n \geqslant 2$, obéissent, par exemple, au

Théorème 1. *Parmi les sphères* S^n, $n \geqslant 2$, *seules* S^2 *et* S^6 *admettent une structure presque complexe.*

La démonstration exige de longs préliminaires.

Nous avons intérêt à numéroter les coordonnées des points de $\mathbb{R}^{n+1}$ par les indices inférieurs de 0 à n et à désigner les vecteurs unités des axes de coordonnées par $\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_n$. On identifie de plus $\mathbb{R}^n$ à un sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ formé des vecteurs $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n)$, où $x_n = 0$. Corrélativement, les colonnes et les lignes des matrices de SO $(n + 1)$ sont numérotées par les nombres de 0 à n, et on identifie chaque matrice $A \in$ SO (n) à la matrice

$$A \oplus \| 1 \| = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

de SO $(n + 1)$,

On introduit l'application

$$p : \mathrm{SO}\,(n+2) \to S^{n+1} \tag{6}$$

qui fait correspondre à chaque $A \in$ SO $(n + 2)$ sa dernière colonne, i.e. le point $A\mathbf{e}_{n+1}$ de la sphère S^{n+1}. [Cette application n'est autre

que la projection π du $\mathcal{G}$-fibré principal $(\Gamma, \pi, \Gamma/\mathcal{G})$ de l'exemple 2 de la leçon 1 si $\Gamma = SO(n+2)$ et $\mathcal{G} = SO(n+1)$; la tradition exige qu'on remplace π par p.]

Proposition 2. *Si la sphère* S^n, $n = 2m$, *admet une structure presque complexe, le fibré* $p: SO(n+2) \to S^{n+1}$ *possède une section*

$$s: S^{n+1} \to SO(n+2). \tag{7}$$

D é m o n s t r a t i o n. Chaque vecteur $\mathbf{x} \in S^{n+1}$ s'écrit de façon unique

$$\mathbf{x} = a\mathbf{y} + b\mathbf{e}_{n+1}, \tag{8}$$

où $a^2 + b^2 = 1$, $a \geqslant 0$ et $\mathbf{y} \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. D'autre part, si S^n admet une structure presque complexe, il existe sur S^n, en vertu de la proposition 1, un champ $\mathbf{y} \mapsto I_\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in S^n$, d'opérateurs antisymétriques orthogonaux $I_\mathbf{y}: \mathbf{T}_\mathbf{y}S^n \to \mathbf{T}_\mathbf{y}S^n$ (dans la métrique sur $\mathbf{T}_\mathbf{y}S^n$ induite par l'inclusion $\mathbf{T}_\mathbf{y}S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$).

Soit, dans $\mathbb{R}^{n+2}$, le supplémentaire orthogonal $(\mathbf{T}_\mathbf{y}S^n)^\perp$ du sous-espace $\mathbf{T}_\mathbf{y}S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Il est engendré, c'est clair, par les vecteurs $\mathbf{y}$ et $\mathbf{e}_{n+1}$. On prolonge $I_\mathbf{y}$ en l'opérateur $A_\mathbf{y}: \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^{n+2}$ si l'on suppose que $A_\mathbf{y}$ coïncide sur $\mathbf{T}_\mathbf{y}S^n$ avec $I_\mathbf{y}$ et qu'il est défini sur $(\mathbf{T}_\mathbf{y}S^n)^\perp$ par la formule

$$A_\mathbf{y}(-\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{e}_{n+1}) = \beta\mathbf{y} - \alpha\mathbf{e}_{n+1}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Chaque $A_\mathbf{y}$ est manifestement antisymétrique et orthogonal.

On identifie $A_\mathbf{y}$ à sa matrice et on pose pour tout vecteur (8):

$$s(\mathbf{x}) = aA_\mathbf{y} + bE,$$

avec E la matrice unité d'ordre 2. Comme

$$s(\mathbf{x})^\top s(\mathbf{x}) = (aA_\mathbf{y}^\top + bE)(aA_\mathbf{y} + bE) =$$
$$= a^2A_\mathbf{y}^\top A_\mathbf{y} + ab(A_\mathbf{y}^\top + A_\mathbf{y}) + b^2E = (a^2 + b^2)E = E,$$

la matrice $s(\mathbf{x})$ est orthogonale, si bien que l'application $s: \mathbf{x} \mapsto s(\mathbf{x})$ est $s: S^{n+1} \to SO(n+2)$. Puisque

$$(p \circ s)(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x})\mathbf{e}_{n+1} = aA_\mathbf{y}\mathbf{e}_{n+1} + b\mathbf{e}_{n+1} = a\mathbf{y} + b\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{x},$$

l'application s est en outre une section de p. □

La proposition 2 est connue sous le nom de *théorème de Kirchhoff*.

Quel avantage tire-t-on d'avoir passé de $\tau_{S^n}(W_m)$ à $(SO(n+2), p, S^{n+1})$? Le fait est que puisque ce dernier fibré est un fibré principal, affirmer qu'il existe une section (7), c'est affirmer que $(SO(n+2), p, S^{n+1})$ est trivial (voir leçon 1).

Problème 6. Démontrer que $(SO(n+2), p, S^{n+1})$ *est associé au fibré tangent* $\tau_{S^{n+1}}$ *de la sphère* S^{n+1} (i.e. avec les notations introduites dans la leçon 7, celui-ci est le fibré principal $\tau_{S^{n+1}}$). [*Indication.* Quels que soient le point $\mathbf{x} \in S^{n+1}$ et la base orthonormée $\mathbf{a}_0, \ldots$

. . ., a_n de l'espace $T_x\mathcal{S}^{n+1}$, la famille $(a_0, \ldots, a_n, x)$ constitue une base orthonormée de $\mathbb{R}^{n+2}$, et toute base orthonormée de $\mathbb{R}^{n+2}$ s'obtient de façon analogue.]

Il en résulte que la condition d'existence de (7) équivaut à la trivialité du fibré $\tau_{\mathcal{S}^{n+1}}$, i.e. à l'existence d'un parallélisme sur $\mathcal{S}^{n+1}$. Ainsi, *la sphère* $\mathcal{S}^{n+1}$ *est parallélisable si la sphère* $\mathcal{S}^n$ *admet une structure presque complexe.*

Il suffit donc de prouver, pour avoir le théorème 1, que

A. *Les sphères* $\mathcal{S}^2$ *et* $\mathcal{S}^6$ *admettent chacune une structure presque complexe.*

B. *Si* $n \neq 1, 3, 7$, $\mathcal{S}^n$ *est non parallélisable.*

[Le parallélisme sur la circonférence $\mathcal{S}^1$ est évident, et celui sur $\mathcal{S}^3$ et $\mathcal{S}^7$ découle, vu le théorème de Kirchhoff, de l'existence d'une structure presque complexe sur $\mathcal{S}^2$ et $\mathcal{S}^6$. D'ailleurs, le fait que $\mathcal{S}^3$ et $\mathcal{S}^7$ sont parallélisables est facilement établi de façon directe (voir plus loin). On note que $\mathcal{S}^n$, $n \geqslant 2$, *admet donc une structure presque complexe si et seulement si* $\mathcal{S}^{n+1}$ *est parallélisable.* La démonstration directe de ce résultat fait visiblement défaut.]

On démontre B par des constructions topologiques qui sortent du cadre du présent exposé. On en parlera dans les leçons 24 à 27. Voyons ce qu'il en est de A.

La question ne se pose pas en ce qui concerne la sphère $\mathcal{S}^2$ dont on sait qu'elle est difféomorphe à la droite projective complexe (sphère de Riemann) et qu'elle est par conséquent une variété presque complexe, voire une variété complexe. Mais dans le cas de $\mathcal{S}^6$, on a besoin de certains résultats algébriques qui ont leur intérêt propre.

* * *

Soit Ca l'espace $\mathbb{H}^2$ des couples (ξ, η) des quaternions (qui constitue naturellement un vectoriel sur $\mathbb{R}$) qu'on munit de la multiplication définie par

$$(\xi,\eta)\,(x, y) = (\xi x - \bar{y}\eta,\ \eta\bar{x} + y\xi), \quad \xi, \eta, x, y \in \mathbb{H}. \tag{9}$$

[C'est le même procédé qui permet d'obtenir les nombres complexes à partir des nombres réels et les quaternions à partir des nombres complexes.]

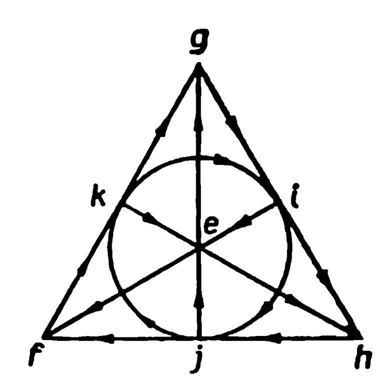
Problème 7. Vérifier que l'espace vectoriel Ca est une $\mathbb{R}$-algèbre (non associative!) avec unité (1, 0) pour (9).

Les éléments de l'algèbre Ca s'appellent *octaves* ou *nombres de Cayley*. On identifie $(\xi, 0)$ aux quaternions ξ, ce qui fait de $\mathbb{H}$ une sous-algèbre de Ca. Chaque octave (ξ, η) est égale à $\xi + \eta e$, avec $e = (0, 1)$, et les *clefs*

$$i, j, k, e, f = ie, \quad g = je, \quad h = ke \tag{10}$$

jointes à l'unité 1 forment une base de l'algèbre Ca.

Les produits deux à deux des clefs sont schématisés par le diagramme



Le produit de deux clefs (10) quelconques est égal au signe près à la clef de la même droite (ou de la circonférence), et le signe est fonction du sens de la flèche. Par exemple, $eh = k$ et $fj = -h$.

Le carré de chaque clef (10) vaut -1.

La partie réelle Re ξ d'un quaternion ξ est la *partie réelle* de l'octave $\mathbf{u} = \xi + \eta e$. La notation correspondante est Re u (ou Sp u).

L'octave $\bar{\xi} - \eta e$, notée $\bar{\mathbf{u}}$, est dite *conjuguée* de $\mathbf{u} = \xi + \eta e$. Il vient de suite de la formule (4) de la leçon 7

$$\mathbf{u}\bar{\mathbf{u}} = \xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} = |\xi|^2 + |\eta|^2, \tag{11}$$

si bien que $\mathbf{u}\bar{\mathbf{u}}$ est réel positif et $\mathbf{u}\bar{\mathbf{u}} = 0$ si et seulement si $\mathbf{u} = 0$. La racine carrée arithmétique de $\mathbf{u}\bar{\mathbf{u}}$, notée $|\mathbf{u}|$, s'appelle *norme* (ou *module*) de l'octave u. On note que $\bar{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \mathbf{u}\bar{\mathbf{u}}$.

La formule (11) entraîne que $\mathbf{u}^{-1} = \bar{\mathbf{u}}/|\mathbf{u}|^2$ vérifie pour $\mathbf{u} \neq 0$ la relation $\mathbf{u}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{u}^{-1} = 1$. Ainsi, *tout élément* u *non nul de l'algèbre* $\mathbb{C}a$ *est inversible.*

Poursuivons. On constate aisément qu'on a pour u et v quelconques :

$$|\mathbf{u}\mathbf{v}| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \tag{12}$$

(*dans l'algèbre* $\mathbb{C}a$ *la norme est multiplicative*). En effet, si $\mathbf{u} = \xi + \eta e$ et $\mathbf{v} = x + ye$, alors

$$|\mathbf{u}\mathbf{v}|^2 = |\xi x - \bar{y}\eta|^2 + |\eta\bar{x} + y\xi|^2 =$$
$$= (\xi x - \bar{y}\eta)(\bar{x}\bar{\xi} - \bar{\eta}y) + (\eta\bar{x} + y\xi)(x\bar{\eta} + \bar{\xi}\bar{y})$$

et

$$|\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 = (\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta})(x\bar{x} + y\bar{y}).$$

Si $y = \lambda + y'$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\bar{y}' = -y'$, on a donc

$$|\mathbf{u}\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 = -(\xi x)(\bar{\eta}y) - (\bar{y}\eta)(\bar{x}\bar{\xi}) + (\eta\bar{x})(\bar{\xi}\bar{y}) + (y\xi)(x\bar{\eta}) =$$
$$= \lambda(-\xi x\bar{\eta} - \eta\bar{x}\bar{\xi} + \eta\bar{x}\bar{\xi} + \xi x\bar{\eta}) - (\xi x\bar{\eta} + \eta\bar{x}\bar{\xi})\,y' + y'(\eta\bar{x}\bar{\xi} + \xi x\bar{\eta}) = 0,$$

car le quaternion $\xi x\bar{\eta} + \eta\bar{x}\bar{\xi}$ est réel, donc permutable avec le quaternion y'. □

La formule (12) entraîne immédiatement que *l'algèbre* $\mathbb{C}a$ *est sans diviseurs de zéro* (i.e. $uv \neq 0$ pour $u \neq 0$ et $v \neq 0$).

* * *

Quand on identifie $\mathbb{C}a$ à $\mathbb{R}^8$ défini par la base (10), la norme dans $\mathbb{C}a$ devient la norme euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^8$, les octaves de norme 1 s'identifient aux points de la sphère S^7 et les octaves imaginaires (orthogonales à 1) de norme 1 aux points de l'équateur S^6 de S^7. Comme la multiplication à droite par l'octave $v \in S^7$ constitue une transformation orthogonale $\mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$ (elle est linéaire sur $\mathbb{R}$ et elle conserve les longueurs en vertu de (12)), uv est orthogonale à $1v = v$ pour toute octave $u \in S^6$. Autrement dit, la multiplication $L_u : \mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$ à gauche par u (une autre transformation orthogonale) vérifie pour tout point $v \in S^7$ (et, partant, pour tout point $v \in \mathbb{C}a$) la relation $(L_u v, v) = 0$, si bien qu'elle constitue une transformation orthogonale antisymétrique $\mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$. Cette transformation envoie le vecteur 1 en le vecteur u et le vecteur u en $u^2 = -1$. Aussi induit-elle la transformation (orthogonale antisymétrique elle aussi) I_u de l'espace tangent T_uS^6 (supplémentaire orthogonal de 1 et de u dans $\mathbb{C}a$). Ainsi, on a construit sur S^6 un champ $u \mapsto I_u$ d'opérateurs orthogonaux antisymétriques, i.e. une structure presque complexe. L'affirmation A se trouve donc établie.

On procède de même pour la sphère S^2 (à condition de remplacer les octaves par les quaternions).

Problème 8. Démontrer que la structure presque complexe ainsi construite sur S^2 coïncide avec celle provenant de l'identification $S^2 = \mathbb{C}P^1$.

Le problème de savoir si S^6 est une variété analytique complexe n'est pas résolu.

* * *

La sphère S^6 est certainement plongée dans $\mathbb{R}^8$. Aussi, l'existence d'une structure presque complexe sur S^6 découle également de la proposition générale suivante.

Proposition 3. *Toute variété orientable de dimension* 6 *plongée dans l'espace* $\mathbb{R}^8$ *admet une structure presque complexe.*

Avant de passer à la démonstration, on doit examiner plus attentivement les sous-espaces de l'algèbre $\mathbb{C}a$.

On introduit pour tout sous-espace $\mathcal{P}$ bidimensionnel de $\mathbb{C}a$ l'ensemble $Z(\mathcal{P})$ de toutes les octaves $u \in \mathbb{C}a$ telles que $\mathcal{P}u \subset \mathcal{P}$. Il est clair que $Z(\mathcal{P})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{C}a$.

La multiplication R_u à droite par u est pour chaque octave $u \in Ca$, $|u| = 1$, une transformation orthogonale $Ca \to Ca$ de l'espace euclidien Ca, si bien que quelle que soit $u \in Ca$, $u \neq 0$, la multiplication R_u par u est une homothétie de Ca. Par conséquent, si $u \in Z(\mathcal{P})$, la restriction de R_u à $\mathcal{P}$ est une homothétie de l'espace euclidien bidimensionnel $\mathcal{P}$. Mais si l'on choisit une base de $\mathcal{P}$, ce qui identifie celui-ci à $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, on réalise chaque homothétie $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ comme transformation linéaire $z \mapsto ae^{i\varphi}z$. Cela définit une application (évidemment linéaire) sur $\mathbb{R}$

(13) $$Z(\mathcal{P}) \to \mathbb{C}, \quad u \mapsto ae^{i\varphi}$$

du vectoriel $Z(\mathcal{P})$ dans le corps $\mathbb{C}$. Comme Ca est sans diviseurs de 0, (13) est injective (c'est un monomorphisme).

Problème 9. Montrer que quelles que soient les octaves $u, v \in \in Ca$, $u \neq 0$,

1° $u(u^{-1}v) = v$;

2° on trouve a et b réels tels que

$$v(u^{-1}v) = au + bv.$$

[*Indication.* $a = \dfrac{2\,\mathrm{Re}(\bar{u}v)}{u\bar{u}}$, $b = -\dfrac{v\bar{v}}{u\bar{u}}$.]

Il en résulte

(14) $$u^{-1}v \in Z(\mathcal{P})$$

pour toutes les octaves $u, v \in \mathcal{P}$, $u \neq 0$. [En effet, si u et v sont linéairement dépendantes, la propriété (14) est évidente, et, dans le cas contraire (si bien que u et v engendrent $\mathcal{P}$), elle est juste si et seulement si $u(u^{-1}v) \in \mathcal{P}$ et $v(u^{-1}v) \in \mathcal{P}$.]

Aussi, dim $Z(\mathcal{P}) = 2$, et l'*application* (13) *est* donc *un isomorphisme.* Cela étant, l'espace vectoriel $Z(\mathcal{P})$ a pour générateurs 1 et $w = u^{-1}v$, avec u, v une base quelconque de l'espace $\mathcal{P}$.

Problème 10. Démontrer que

(15) $$w^2 - 2\,\mathrm{Re}\,w \cdot w + |w|^2 = 0$$

pour toute octave $w \in Ca$. [*Indication.* L'analogue de (15) a lieu pour les nombres complexes et les quaternions.]

L'égalité (15) entraîne de suite que *le vectoriel* $Z(\mathcal{P})$ (*de base* 1, w) *est une sous-algèbre de l'algèbre* Ca. [On note que puisque la multiplication dans Ca est non associative, l'inclusion $\mathcal{P}(uv) \subset \mathcal{P}$ ne découle pas immédiatement de $\mathcal{P}u \subset \mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}v \subset \mathcal{P}$.]

Lemme 2. *Quelles que soient les octaves* $u, w \in Ca$, *on a*

$$(uw)w = u(ww).$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\mathbf{u} = \xi + \eta e$ et $\mathbf{w} = x + ye$. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{uw} &= (\xi x + \bar{y}\eta) + (\eta\bar{x} + y\xi)\, e,\\ (\mathbf{uw})\mathbf{w} &= (\xi x - \bar{y}\eta)\, x - \bar{y}\, (\eta\bar{x} + y\xi) + \\ &\quad + [(\eta\bar{x} + y\xi)\, \bar{x} + y\, (\xi x - \bar{y}\eta)]\, e,\\ \mathbf{ww} &= (x^2 - \bar{y}y) + (y\bar{x} + yx)\, e,\\ \mathbf{u}\,(\mathbf{ww}) &= \xi\, (x^2 - \bar{y}y) - \overline{(y\bar{x} + yx)}\, \eta + \\ &\quad + [\eta\, \overline{(x^3 - \bar{y}y)} + (y\bar{x} + yx)\, \xi] e.\end{aligned}$$

Les quaternions $\bar{y}y$ et $x + \bar{x}$ étant réels commutent avec tout quaternion, si bien que

$$\begin{aligned}\xi\,(x^2 - \bar{y}y) - \overline{(y\bar{x} + yx)}\,\eta &= \xi x^2 - \xi\bar{y}y - (x + \bar{x})\,\bar{y}\eta =\\ &= \xi x^2 - \bar{y}y\xi - \bar{y}\eta\,(x + \bar{x}) =\\ &= (\xi x - \bar{y}\eta)\, x - \bar{y}\,(\eta\bar{x} + y\xi),\\ \eta\,\overline{(x^2 - \bar{y}y)} + (y\bar{x} + yx)\,\xi &= \eta\bar{x}^2 - \eta\bar{y}y + y\,(\bar{x} + x)\,\xi =\\ &= \eta\bar{x}^2 - \bar{y}y\eta + y\xi\,(\bar{x} + x) =\\ &= (\eta\bar{x} + y\xi)\,\bar{x} + y\,(\xi x - \bar{y}\eta).\end{aligned}$$

Par conséquent, $(\mathbf{uw})\mathbf{w} = \mathbf{u}\,(\mathbf{ww})$. □

Problème 11. Déduire du lemme 2 que l'*application* (13) *est un isomorphisme d'algèbres.*

Chose à noter, cet isomorphisme *dépend* du choix de la base $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ de $\mathcal{P}$. Il ne l'est d'ailleurs que d'une manière assez faible, car le corps $\mathbb{C}$ n'a sur $\mathbb{R}$ que l'isomorphisme identique et l'isomorphisme de la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$, si bien que deux isomorphismes $Z(\mathcal{P}) \to \mathbb{C}$ quelconques ou bien coïncident, ou bien diffèrent par la conjugaison complexe. Cela étant, si deux bases de $\mathcal{P}$ se déforment continûment l'une dans l'autre (déterminent une même orientation de $\mathcal{P}$), on est certes dans le premier cas. Par conséquent, *quel que soit le sous-espace orienté $\mathcal{P}$ bidimensionnel de $\mathbb{C}a$, l'algèbre $Z(\mathcal{P})$ est canoniquement (sans qu'on admette un arbitraire quelconque) isomorphe au corps $\mathbb{C}$.*

Un calcul direct montre que le produit scalaire associé à la norme $|\mathbf{u}|$ est défini dans $\mathbb{C}a$ par la formule

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathrm{Re}\,(\mathbf{xu}).$$

(On note que la base (10) est orthonormée relativement à ce produit.) Aussi, on définit tout sous-espace Q de dimension 6 de $\mathbb{C}a$ par les équations linéaires de la forme

$$\mathrm{Re}\,(\mathbf{xu}) = 0,$$

avec $\mathbf{u}$ parcourant le sous-espace bidimensionnel $Q^{\perp}$.

Problème 12. Démontrer que

$$\mathrm{Re}\,((\mathbf{w}\mathbf{x})\mathbf{u}) = \mathrm{Re}\,(\mathbf{w}\,(\mathbf{x}\mathbf{u}))$$

pour n'importe quelles octaves w, x, u de $\mathbf{C}a$.

D'où le résultat suivant : si $\mathbf{x} \in Q$ et $\mathbf{w} \in Z\,(Q^{\perp})$, alors $\mathbf{wx} \in Q$, et *le sous-espace Q est* donc *un vectoriel sur le corps* $Z\,(\mathcal{P})$. Comme le supplémentaire orthogonal $Q^{\perp}$ de Q orienté est orienté de façon naturelle (on suppose que $\mathbf{C}a$ est munie d'une orientation par rapport à laquelle la base (10) est positive) et $Z\,(Q^{\perp})$ peut donc être identifié au corps $\mathbf{C}$, cela prouve que *chaque sous-espace orienté de dimension* 6 $Q \subset \mathbf{C}a$ *admet une structure complexe naturelle.*

On est en mesure d'aborder la

D é m o n s t r a t i o n de la proposition 3. On estime (sans qu'aucune perte de généralité ne s'ensuive) que $\mathcal{X}$ est une sous-variété orientée de $\mathbf{C}a$, si bien que chaque espace tangent $\mathbf{T}_p\mathcal{X}$, $p \in \mathcal{X}$, est supposé être un sous-espace orienté de cette algèbre. Selon le résultat que nous venons d'établir, chaque espace admet une structure complexe naturelle, ce qui donne la proposition 3 vu que ces structures dépendent différentiablement (c'est évident) de p. □

* * *

Un ensemble $\mathcal{G}$ muni de la multiplication

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G} \tag{16}$$

s'appelle *quasi-groupe* si les équations $ax = b$ et $xa = b$ possèdent, pour $a, b \in \mathcal{G}$ quelconques, une solution unique, i.e. si les translations

$$L_a x = ax, \; R_a x = xa, \; x \in \mathcal{G},$$

constituent pour tout $a \in \mathcal{G}$ des bijections $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ est un espace topologique (resp. variété différentiable), si la multiplication (16) est continue (resp. différentiable) et que chaque application L_a, $R_a : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $a \in \mathcal{G}$, soit un homéomorphisme (resp. difféomorphisme), on dit que $\mathcal{G}$ est un *quasi-groupe topologique* (resp. *quasi-groupe différentiable* ou encore *quasi-groupe de Lie*).

On choisit et on fixe un élément e de $\mathcal{G}$ et on désigne par a', pour chaque $a \in \mathcal{G}$, un élément de $\mathcal{G}$ tel que $L_{a'}\,e = a$ (i.e. tel que $R_e a' = a$). Si $\mathcal{G}$ est un quasi-groupe différentiable, on définit la différentielle $(\mathrm{d}L_{a'})_e$ en e de l'application $L_{a'}$, qui est une application linéaire non dégénérée

$$\mathbf{T}_e\mathcal{G} \to \mathbf{T}_a\mathcal{G}.$$

Aussi, l'image par $(\mathrm{d}L_{a'})_e$ de chaque base (choisie une fois pour toutes) de l'espace $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$ est une base de $\mathbf{T}_a\mathcal{G}$. On définit par là pour tout point $a \in \mathcal{G}$ une base de $\mathbf{T}_a\mathcal{G}$, qui dépend différentiablement de a,

i.e. on construit une trivialisation du fibré $\tau\mathcal{G}$. Cela prouve que *chaque quasi-groupe différentiable est une variété parallélisable.*

Citons à titre de quasi-groupes différentiables les sphères S^1, S^3 et S^7 (elles le sont pour la multiplication des nombres complexes, des quaternions et des nombres de Cayley respectivement ; cela étant, les quasi-groupes S^1 et S^3 sont évidemment des groupes). Aussi, *les sphères* S^1, S^3 *et* S^7 *sont parallélisables* (on le sait d'ailleurs ; voir plus haut).

Voyons si la multiplication sur S^1, S^3, S^7 est prolongeable aux sphères de dimension différente.

* * *

Une algèbre $\mathcal{A}$ sur un corps K est une *algèbre à division* si $ax = b$ admet une solution unique pour tout a et tout b de $\mathcal{A}^*$, où $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \setminus \{0\}$, i.e. si l'ensemble $\mathcal{A}^*$ est un quasi-groupe pour la multiplication dans $\mathcal{A}^*$.

Problème 13. Démontrer que si l'algèbre $\mathcal{A}$ est de dimension finie, alors $ax = b$, $a, b \in \mathcal{A}^*$, possède une solution unique si et seulement s'il en est ainsi pour $xa = b$. [*Indication.* Les deux conditions imposées à $\mathcal{A}$ équivalent à faire de $\mathcal{A}$ une algèbre sans diviseurs de zéro, i.e. $ab \neq 0$ pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$.]

Deux algèbres $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont dites *isotopes* s'il existe des applications linéaires bijectives $A, B, C\colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ telles que

$$C(xy) = Ax \cdot By$$

pour tout x et tout y de $\mathcal{A}_1$.

Il est clair que toute algèbre isotope à une algèbre à division est une algèbre à division.

Problème 14. Démontrer que *toute algèbre à division $\mathcal{A}$ est isotope à une algèbre à division avec unité.* [*Indication.* Choisir $e \in \mathcal{A}$ non nul quelconque et considérer A et B comme $x \mapsto ex$ et $x \mapsto xe$.]

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre à division de dimension finie, et soit $n+1$ sa dimension. On munit $\mathcal{A}$ d'une métrique euclidienne quelconque et on désigne par S^n l'ensemble de tous les éléments de norme 1 de $\mathcal{A}$ et par φ l'application $\mathcal{A}^* \to S^n$ donnée par

$$\varphi(a) = \frac{a}{|a|}, \quad a \in \mathcal{A}^*,$$

$|a|$ étant la norme de a. Si $a, b \in S^n$, alors $ab \in \mathcal{A}^*$, ce qui définit l'élément $\varphi(ab) \in S^n$. On munit S^n d'une multiplication $*$ telle que

$$a * b = \varphi(ab)$$

pour a, $b \in S^n$ quelconques. Quels que soient a, $b \in S^n$, on trouve par hypothèse un élément y de $\mathcal{A}^*$ tel que $ay = b$. Soit $x = \varphi(y)$, auquel cas

$$ax = a \cdot \frac{y}{|y|} = \frac{1}{|y|} ay = \frac{b}{|x|},$$

donc $\varphi(ax) = b$, i.e. $a * x = b$. Pareillement, on démontre que quels que soient a, $b \in S^n$, il existe un élément $x \in S^n$ tel que $x * a = b$. La sphère S^n est par conséquent un quasi-groupe pour $*$, si bien qu'elle est parallélisable.

Ainsi, la multiplication sur les sphères S^1, S^3, S^7 admet en effet une généralisation qui, sans aboutir à d'autres sphères parallélisables, montre en vertu de **B** (non démontrée pour l'instant) que *les algèbres à division sur* $\mathbb{R}$ *ne peuvent être que de dimension* 1, 2, 4 *et* 8. [Les algèbres à division de cette dimension existent réellement. Témoin les algèbres $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{C}a$. Elles ne sont certes pas les seules. Il suffit de citer les algèbres isotopes à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{C}a$.]

Il serait intéressant de démontrer la non-existence des $\mathbb{R}$-algèbres à division de dimension $n \neq 1, 2, 4, 8$ par des moyens purement algébriques (lorsque seules sont utilisées les propriétés topologiques simples de $\mathbb{R}$). De nombreux mathématiciens qui se sont penchés des années durant sur ce problème n'ont réussi à le faire qu'au prix de certaines conditions supplémentaires imposées à $\mathcal{A}$ (sous l'hypothèse, par exemple, de $\mathcal{A}$ une *algèbre à exponentiation associative*).

Nous reverrons ces questions dans la leçon 24.

LEÇON 9

Géométries de Klein. — Fibrés de type $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$. — Comparaison entre les $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibrés et les fibrés $\xi[\mathcal{F}]$. — Réduction des $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibrés. — Réduction des fibrés principaux. — Revêtement à deux feuillets d'une variété non orientable.

Dans cette leçon, nous définirons la notion de réduction pour les fibrés localement triviaux quelconques munis d'un groupe structural. Il serait bon de déterminer ces fibrés sans utiliser cette fois-ci les fibrés principaux. Ainsi, la leçon 1 nous est pour le moment inutile.

Il faut d'abord généraliser la notion de $\mathcal{G}$-espace vectoriel.

Supposons que le groupe $\mathcal{G}$ opère à gauche sur l'ensemble $\mathcal{F}$.

Définition 1. Un ensemble $\mathcal{X}$ s'appelle *espace de type* $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ si l'on se donne un ensemble Coor $\mathcal{X}$ de bijections

$$p: \mathcal{X} \to \mathcal{F},$$

tel que

a) si p $\in$ Coor $\mathcal{X}$, alors $L_a \circ$p $\in$ Coor $\mathcal{X}$ pour tout $a \in \mathcal{G}$;

b) si p et q appartiennent à Coor $\mathcal{X}$, il existe un élément a de $\mathcal{G}$ ayant la propriété $q = L_a \circ p$.

Si le groupe $\mathcal{G}$ opère effectivement sur $\mathcal{F}$, i.e. si $L_a = \mathrm{id}$ (voir leçon 1) seulement quand $a = e$, l'élément a est unique.

Les espaces de type $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ s'appellent également $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-*espaces*. Lorsqu'un ensemble $\mathcal{X}$ est un $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-espace, on dit qu'on a défini sur lui une $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-*structure* ou qu'il porte la $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-*géométrie*.

Exemple 1. Pour tout espace vectoriel $\mathcal{V}$, les isomorphismes linéaires $\mathcal{V} \to \mathbb{K}^n$ sont en correspondance bijective canonique avec les bases dans $\mathcal{V}$, si bien que les $\mathcal{G}$-espaces vectoriels sont exactement les espaces de type $(\mathcal{G}, \mathbb{K}^n)$ pour tout sous-groupe $\mathcal{G} \subset \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$.

En particulier, les espaces de type $(\mathrm{GL}(n; \mathbb{K}), \mathbb{K}^n)$ sont des espaces vectoriels de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Exemple 2. Si Aff $(n; \mathbb{K})$ est le groupe de toutes les transformations affines (linéaires non homogènes) de $\mathbb{K}^n$, alors les (Aff $(n; \mathbb{K})$, $\mathbb{K}^n$)-espaces sont de même précisément les espaces affines de dimension n sur $\mathbb{K}^n$.

Exemple 3. Les espaces de type (Proj $(n; \mathbb{K})$, $\mathbb{K}P^n$) avec Proj $(n; \mathbb{K})$ le groupe de toutes les transformations projectives $\mathbb{K}P^n \to \mathbb{K}P^n$, sont des espaces projectifs de dimension n sur $\mathbb{K}^n$.

Nous avons examiné ces trois exemples dans I.26. Dans chaque cas, les applications de Coor $\mathcal{X}$ sont exactement les *isomorphismes de*

coordonnées, ce qui nous autorise à leur donner ce nom dans le cas général d'un $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-espace $\mathcal{X}$ arbitraire.

Exemple 4. L'espace $\mathcal{F}$ est un espace de type $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ si l'on assimile à Coor $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les applications $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ de la forme L_a, $a \in \mathcal{G}$.

Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de type $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$. Une bijection

$$f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

s'appelle $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-*isomorphisme* (ou *isomorphisme* tout court) si on l'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{L_a} & \mathcal{F}, \end{array} \qquad (1)$$

où $p \in$ Coor $\mathcal{X}$, $q \in$ Coor $\mathcal{Y}$ et $a \in \mathcal{G}$. Si le $\mathcal{G}$-espace $\mathcal{F}$ est effectif, l'élément a est défini de façon unique pour p et q donnés.

Problème 1. Montrer que les isomorphismes de coordonnées p et q du diagramme (1) peuvent être quelconques: si, pour f donnée, l'élément $a \in \mathcal{G}$ existe pour p et q choisis d'une certaine manière, il existe (tout en étant différent) pour tout autre choix de ces isomorphismes.

Les isomorphismes d'un $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-espace $\mathcal{X}$ sur lui-même sont ses *automorphismes* qui forment le groupe Aut $\mathcal{X}$. Lorsque $\mathcal{G}$ agit effectivement sur $\mathcal{F}$, le groupe Aut $\mathcal{X}$ est isomorphe à $\mathcal{G}$.

Remarque 1. L'idée de caractériser une géométrie par le groupe de ses automorphismes appartient à Klein (qui l'avait énoncée dans le *Programme d'Erlangen*). Aussi, on donne des fois aux $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-géométries le nom de ***géométries de Klein***.

Si $\mathcal{F}$ est un espace topologique (une variété différentiable) et $\mathcal{G}$ un groupe topologique (différentiable) qui opère continûment (différentiablement) sur $\mathcal{F}$, on munit chaque $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-espace $\mathcal{X}$ d'une topologie (d'une structure différentiable) par un isomorphisme de coordonnées $p: \mathcal{X} \to \mathcal{F}$ quelconque. (La définition est manifestement intrinsèque, i.e. elle ne dépend pas de p choisi.)

C'est justement de cette façon que nous avons conféré la structure différentiable aux espaces affines et vectoriels réels (voir leçon III.11).

* * *

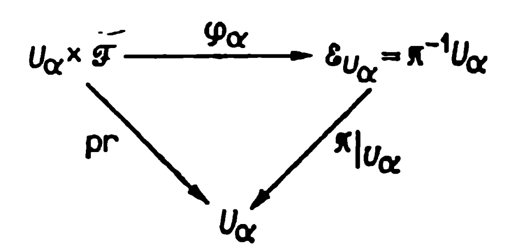
Revenons aux fibrés.

Soit $\mathcal{G}$ un groupe topologique qui agit continûment sur un espace topologique $\mathcal{F}$.

Définition 2. (Cf. définition 3 de la leçon 7.) Un fibré $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ est un *fibré de type* $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ si

a) la fibre $\mathcal{F}_b = \pi^{-1}(b)$ au-dessus de tout point $b \in \mathcal{B}$ est un espace de type $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$;

b) il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de l'espace $\mathcal{B}$ et des homéomorphismes fibre à fibre



tels que l'application

(2) $\varphi_{\alpha,b}: \mathcal{F} \to \mathcal{F}_b, \; x \mapsto \varphi_\alpha(b, x), \; x \in \mathcal{F},$

soit pour tout $b \in U_\alpha$ un $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-isomorphisme (i.e., ce qui revient au même, si l'application réciproque $\varphi_{\alpha,b}^{-1}: \mathcal{F}_b \to \mathcal{F}$ est un isomorphisme de Coor $\mathcal{F}_b$).

Les fibrés de type $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ s'appellent encore *$(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibrés.*

Un homéomorphisme φ_α est une *trivialisation* d'un *$(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibré ξ au-dessus de U_α*. On donne parfois le nom de *trivialisation* au couple $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

Les ensembles U_α constituent des *voisinages trivialisants*, et la famille $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de couples mentionnés $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ est un *atlas trivialisant* d'un $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibré ξ.

Un cas particulier des $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibrés est fourni par les $\mathcal{G}$-fibrés vectoriels qui interviennent lorsque $\mathcal{F} = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{G} \subset \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$.

D'autres cas particuliers (inconnus pour le moment) sont les *fibrés affines* et *projectifs*. S'agissant des fibrés affines, on a $\mathcal{F} = \mathbb{K}^n$, $\mathcal{G} = \mathrm{Aff}\,(n; \mathbb{K})$, et, dans le cas projectif, $\mathcal{F} = \mathbb{K}P^n$, $\mathcal{G} = \mathrm{Proj}\,(n; \mathbb{K})$.

Problème 2. Démontrer que *pour tout $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibré, la projection $\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ est une application ouverte.*

Soient $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ et $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{B})$ deux $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibrés sur l'espace $\mathcal{B}$.

Définition 3. Un homéomorphisme fibre à fibre

$$f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$$

sur $\mathcal{B}$ s'appelle *$(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-isomorphisme* si, pour tout point $b \in \mathcal{B}$, l'application induite

$$f_b: \mathcal{F}_b \to \mathcal{F}'_b$$

de fibres est un $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-isomorphisme de $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-espaces.

Remarque 2. On se borne aux isomorphismes (contrairement au cas des fibrés vectoriels; voir définition 2 de la leçon 6) parce

qu'on ne possède pas pour le moment la notion générale d'un morphisme des ($\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$)-espaces.

Problème 3. Donner une définition (aussi générale que possible) des morphismes de fibrés affines et projectifs.

Si les trivialisations $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ et (U_β, φ_β) de l'atlas trivialisant d'un ($\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$)-fibré $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ sont telles que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, on définit pour tout point $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ un ($\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$)-automorphisme

$$\varphi_{\beta\alpha}(b) = \varphi_{\beta, b}^{-1} \circ \varphi_{\alpha, b} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

de l'espace $\mathcal{F}$. Si le groupe $\mathcal{G}$ agit effectivement sur $\mathcal{F}$, cet automorphisme admet une représentation unique, savoir L_a, $a \in \mathcal{G}$. On identifie a et $\varphi_{\beta\alpha}(b)$ et on assimile par là même $\varphi_{\beta\alpha}(b)$ à un élément du groupe $\mathcal{G}$. Etant donné cette convention, la formule

$$\varphi_{\beta\alpha} : b \mapsto \varphi_{\beta\alpha}(b), \quad b \in U_\alpha \cap U_\beta,$$

définit une application

$$\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathcal{G}.$$

Quels que soient l'espace topologique U et l'application continue $\varphi : U \to \mathcal{G}$, l'application

$$\hat{\varphi} : U \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

définie par

$$\hat{\varphi}(b, x) = \varphi(b)\, x, \quad b \in U, \quad x \in \mathcal{F},$$

est manifestement continue (c'est le produit de composition de l'application continue

$$\varphi \times \mathrm{id} : U \times \mathcal{F} \to \mathcal{G} \times \mathcal{F}, \quad (b, x) \mapsto (\varphi(b), x),$$

et de l'action $\mathcal{G} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$).

Définition 4. On dit que l'action du groupe $\mathcal{G}$ sur l'espace $\mathcal{F}$ et le $\mathcal{G}$-espace $\mathcal{F}$ lui-même sont *topologiquement effectifs* si l'application de la forme $\varphi : U \to \mathcal{G}$ est continue si et seulement si l'application $\hat{\varphi} : U \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ l'est.

Problème 4. Démontrer que *toute action topologiquement effective est continue et effective.*

Exemple 5. Selon le lemme 1 de la leçon 6, l'action du groupe GL $(n; \mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^n$ est topologiquement effective.

Problème 5. Montrer que l'action des groupes Aff $(n; \mathbb{K})$ et Proj $(n; \mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}P^n$ respectivement est topologiquement effective.

Lorsque $U = U_\alpha \cap U_\beta$ et $\varphi = \varphi_{\beta\alpha}$, l'application $\hat{\varphi}$ n'est autre que le composé pr $\circ (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)$ de l'homéomorphisme $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : U \times$

$\times \mathcal{F} \to U \times \mathcal{F}$ et de la projection $U \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, d'où sa continuité. Par conséquent, *l'application* $\varphi_{\beta\alpha}$ *est continue si* $\mathcal{G}$ *opère sur* $\mathcal{F}$ *de façon topologiquement effective.*

Problème 6. Montrer que

1° *Les applications* $\varphi_{\beta\alpha}$ *constituent le cocycle* φ *du recouvrement trivialisant* $\mathfrak{U} = \{U\}$ *sur le groupe* $\mathcal{G}$ (voir définition 3 de la leçon 6).

2° *La classe de cohomologie* $[\varphi] \in H^1(\mathfrak{U}; \mathcal{G})$ *de ce cocycle ne dépend pas du choix des trivialisations* φ_α.

3° *La formule* $\xi \Leftrightarrow [\varphi]$ *établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble de classes des* $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$*-fibrés isomorphes sur* $\mathcal{B}$ *admettant le recouvrement trivialisant donné* $\mathfrak{U}$ *et l'ensemble* $H^1(\mathfrak{U}; \mathcal{G})$. (Cf. théorème 1 de la leçon 6.)

On note qu'en connaissant le cocycle $\varphi = \{\varphi_{\beta\alpha}\}$, on peut construire un $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibré ξ même pour les $\mathcal{G}$-espaces $\mathcal{F}$ non effectifs. Mais dans ce cas, les cocycles non cohomologues peuvent donner naissance à des fibrés isomorphes (et tout $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibré n'est certes pas défini par un cocycle).

* * *

Si l'on compare le problème 6 avec la remarque 2 de la leçon 6 et qu'on s'adresse à l'exemple 3 de ladite leçon, on peut affirmer que les $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibrés coïncident en fait avec les fibrés de type $\xi[\mathcal{F}]$, avec ξ un $\mathcal{G}$-fibré principal localement trivial quelconque (et qu'ils décrivent donc immédiatement les fibrés de type $\xi[\mathcal{F}]$ localement triviaux sans utiliser les fibrés principaux).

Voyons ce problème de plus près (cf. exemple 3 de la leçon 6).

Il va de soi qu'on suppose connus les résultats de la leçon 1.

Soit $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ un $\mathcal{G}$-fibré principal quelconque, et soit $\xi = \xi[\mathcal{F}]$, où $\mathcal{F}$ est pour l'instant un $\mathcal{G}$-espace à gauche arbitraire. On sait (voir formule (12) de la leçon 1) que pour tout point $\mathrm{p} \in \mathcal{E}$ la formule

$$j_{\mathrm{p}}(x) = [\mathrm{p}, x]_{\mathcal{G}}, \quad x \in \mathcal{F},$$

définit l'homéomorphisme $j_{\mathrm{p}}: \mathcal{F} \to \mathcal{F}_b$ de $\mathcal{F}$ sur la fibre $\mathcal{F}_b$ du fibré ξ au-dessus du point $b = \pi(\mathrm{p})$ (orbite $\mathrm{p}\mathcal{G}$ du point p). Soit q un autre point de l'orbite b. Si $\mathrm{p} = \mathrm{q}a$, $a \in \mathcal{G}$, on a pour tout point $x \in \mathcal{F}$:

$$(j_{\mathrm{q}}^{-1} \circ j_{\mathrm{p}})(x) = j_{\mathrm{q}}^{-1}[\mathrm{p}, x] = j_{\mathrm{q}}^{-1}[\mathrm{q}, ax] = ax,$$

i.e. $j_{\mathrm{q}}^{-1} \circ j_{\mathrm{p}} = L_a$. Autrement dit, l'ensemble de toutes les applications de la forme j_{p}^{-1} satisfait aux conditions a) et b) de la définition 1. Si l'on considère cet ensemble comme Coor $\mathcal{F}_b$, on munit donc $\mathcal{F}_b$ d'une $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-structure.

On suppose le fibré principal ξ localement trivial, i.e. un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de $\mathcal{B}$ est tel qu'il existe pour tout α un homéo-

morphisme équivariant

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathcal{G} \to \mathcal{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1} U_\alpha$$

de $\mathcal{G}$-espaces principaux. Soit l'application

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathcal{F} \to \mathcal{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1} U_\alpha$$

donnée par

$$\varphi_\alpha(b, x) = [\varphi_\alpha(b, e), x]_{\mathcal{G}}, \quad b \in U_\alpha, \quad x \in \mathcal{F},$$

où e est toujours l'unité du groupe $\mathcal{G}$. On voit de suite qu'il s'agit d'un homéomorphisme fibre à fibre (l'homéomorphisme réciproque est défini par

$$[\mathrm{p}, x]_{\mathcal{G}} \mapsto (b, ax), \quad \mathrm{p} \in \mathcal{E}, \quad x \in \mathcal{F},$$

avec $b = \pi(\mathrm{p})$ et $a = \tau(\varphi_\alpha(b, e), \mathrm{p})$ un élément de $\mathcal{G}$ tel que $\varphi_\alpha(b, e)\, a = \mathrm{p}$). Ce faisant, l'application $\varphi_{\alpha,\, b}: x \mapsto \varphi_\alpha(b, x)$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}_b$ n'est autre pour tout point $b \in U_\alpha$ que l'application j_p, $\mathrm{p} = \varphi_\alpha(b, e)$, i.e. c'est un isomorphisme de $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-espaces.

Ainsi, on vient de prouver que *quel que soit le $\mathcal{G}$-fibré principal localement trivial ξ, le fibré $\xi = \xi[\mathcal{F}]$ est de type $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$.*

La réciproque n'est vraie que si l'on suppose que l'action du groupe $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{F}$ est topologiquement effective.

Soit $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ un $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibré quelconque.

Soient

$$\mathcal{E} = \bigsqcup_{b \in \mathcal{B}} \mathrm{Coor}\, \mathcal{F}_b$$

un ensemble,

$$\pi: \mathcal{E} \to \mathcal{B}$$

une application définie par

$$\pi(\mathrm{p}) = b \quad \text{si} \quad \mathrm{p} \in \mathrm{Coor}\, \mathcal{F}_b,$$

et $\{U_\alpha\}$ un recouvrement trivialisant du fibré ξ.

Étant donné une trivialisation $\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathcal{F} \to \mathcal{E}_{U_\alpha}$ de ξ au-dessus de U_α et un point $b \in U_\alpha$ quelconque, l'application $\varphi_{\alpha,\, b}^{-1}: \mathcal{F}_b \to \mathcal{F}$ est par hypothèse un élément de Coor $\mathcal{F}_b$. Aussi, on pose

$$\varphi_\alpha(b, a) = L_a^{-1} \circ \varphi_{\alpha,\, b}^{-1}, \quad b \in U_\alpha, \quad a \in \mathcal{G},$$

et on obtient une application (évidemment bijective et fibre à fibre)

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \times \mathcal{G} \to \mathcal{E}_{U_\alpha} = \bigsqcup_{b \in U_\alpha} \mathrm{Coor}\, \mathcal{F}_b.$$

On munit $\mathcal{E}_{U_\alpha}$ d'une topologie sous l'hypothèse de φ_α homéomorphe (i.e. on dit que l'ensemble $O \subset \mathcal{E}_{U_\alpha}$ est ouvert si et seulement si $\varphi_\alpha^{-1} O$ est ouvert dans $U_\alpha \times \mathcal{G}$).

Lemme 1. *On suppose que l'ensemble $\mathscr{X}$ est la réunion d'ensembles $\mathscr{X}_\alpha$ munis chacun d'une topologie $\mathfrak{T}_\alpha$. Si, pour tout α et tout β, l'intersection $\mathscr{X}_\alpha \cap \mathscr{X}_\beta$ est ouverte dans $\mathscr{X}_\alpha$ (et, partant, dans $\mathscr{X}_\beta$ en raison de symétrie) et si les topologies induites sur $\mathscr{X}_\alpha \cap \mathscr{X}_\beta$ par les topologies $\mathfrak{T}_\alpha$ et $\mathfrak{T}_\beta$ s'identifient, il existe sur $\mathscr{X}$ une seule topologie $\mathfrak{T}$ par rapport à laquelle tous les ensembles $\mathscr{X}_\alpha$ sont ouverts, et la topologie $\mathfrak{T}$ induit sur chacun d'eux la topologie $\mathfrak{T}_\alpha$.*

Démonstration. *Unicité.* Si $\mathfrak{T}$ existe, l'ensemble $O \subset \mathscr{X}$ est ouvert dans $\mathscr{X}$ si et seulement si l'intersection $O \cap \mathscr{X}_\alpha$ est ouverte dans $\mathscr{X}_\alpha$ pour tout α. Par conséquent, la topologie $\mathfrak{T}$ est unique.

Existence. Nous qualifierons $O \subset \mathscr{X}$ d'ouvert si, pour tout α, l'intersection $O \cap \mathscr{X}_\alpha$ est ouverte dans $\mathscr{X}_\alpha$. On conçoit que tous ces ensembles constituent la topologie $\mathfrak{T}$ dans $\mathscr{X}$. Par suite de la condition imposée à $\mathfrak{T}_\alpha$, si $O \subset \mathscr{X}_\alpha$, une condition nécessaire et suffisante pour que O soit ouvert dans $\mathscr{X}$ est que cet ensemble le soit dans $\mathscr{X}_\alpha$. Par conséquent, $\mathscr{X}_\alpha$ est ouvert dans $\mathscr{X}$, et la topologie $\mathfrak{T}$ induit sur $\mathscr{X}_\alpha$ la topologie $\mathfrak{T}_\alpha$. □

[On note l'intérêt de ce lemme qui permet en fait d'introduire une topologie dans une variété différentiable $\mathscr{X}$ (voir leçou III. 7) avec recours aux voisinages de coordonnées U_α au lieu des sous-espaces $\mathscr{X}_\alpha$.]

Si l'on veut appliquer le lemme 1 à l'ensemble $\mathscr{X} = \mathscr{E}$ et aux espaces topologiques $\mathscr{X}_\alpha = \mathscr{E}_{U_\alpha}$, il faut démontrer que, pour tout α et tout β, l'intersection $\mathscr{E}_{U_\alpha} \cap \mathscr{E}_{U_\beta}$ est ouverte dans $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ et que la topologie induite sur elle par les topologies des espaces $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ et $\mathscr{E}_{U_\beta}$ est la même. Puisque

$$\mathscr{E}_{U_\alpha} \cap \mathscr{E}_{U_\beta} = \mathscr{E}_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

et que $\varphi_\alpha^{-1}(\mathscr{E}_{U_\alpha \cap U_\beta}) = (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathscr{G}$, la première affirmation résulte de la propriété de $U_\alpha \cap U_\beta$ d'être ouverte dans U_α. Quant à la deuxième, elle équivaut à dire que l'application

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathscr{G} \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathscr{G}$$

est continue (c'est donc un homéomorphisme en raison de symétrie).

Comme

$$\varphi_\alpha(b, a) = L_a^{-1} \circ \varphi_{\alpha, b}^{-1} = L_a^{-1} \circ \varphi_{\beta\alpha}(b)^{-1} \circ \varphi_{\beta, b}^{-1} = L_{\varphi_{\beta\alpha}(b)a}^{-1} \circ \varphi_{\beta, b}^{-1}$$

pour n'importe quels éléments $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, $a \in \mathscr{G}$, cette application est définie par

$$(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(b, a) = (b, \varphi_{\beta\alpha}(b)a), \quad b \in U_\alpha \cap U_\beta, \quad a \in \mathscr{G},$$

d'où sa continuité (n'oublions pas que le $\mathscr{G}$-espace $\mathscr{F}$ est supposé topologiquement effectif). Aussi, les conditions du lemme se trouvent remplies pour l'ensemble $\mathscr{E}$ et les sous-espaces $\mathscr{E}_{U_\alpha}$, si bien qu'il

existe dans $\mathcal{E}$ une topologie unique par rapport à laquelle tous les espaces $\mathcal{E}_{U_\alpha}$ sont des sous-espaces ouverts.

Vu que chaque φ_α est un homéomorphisme fibre à fibre pour cette topologie, l'application π est continue et ouverte (sur chaque $\mathcal{E}_{U_\alpha}$, donc sur $\mathcal{E}$ tout entier).

L'action à droite de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{E}$ est donnée par la formule

$$\mathrm{p}a = L_a^{-1} \circ \mathrm{p}, \quad \mathrm{p} \in \mathcal{E}, \ a \in \mathcal{G}$$

(on rappelle que $\mathrm{p} \in \mathrm{Coor}\, \mathcal{F}_b$ pour un $b \in \mathcal{B}$, si bien que le produit de composition $L_a^{-1} \circ \mathrm{p}$ est défini et appartient à $\mathrm{Coor}\, \mathcal{F}_b$). Puisque les applications φ_α sont évidemment équivariantes par rapport à cette action (et par rapport à l'opération standard de $\mathcal{G}$ sur $U_\alpha \times \mathcal{G}$), celle-ci est continue et libre, et la translation correspondante est continue (sur chaque $\mathcal{E}_{U_\alpha}$, donc sur $\mathcal{E}$ tout entier). Ainsi,

$$\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$$

est un $\mathcal{G}$-fibré principal.

Problème 7. Montrer que la formule

$$[\mathrm{p}, x]_{\mathcal{G}} \mapsto \mathrm{p}^{-1}(x), \quad \mathrm{p} \in \mathcal{E}, \ x \in \mathcal{F},$$

définit bien l'isomorphisme $\xi[\mathcal{F}] \to \xi$ du fibré associé $\xi[\mathcal{F}] = (\mathcal{E} \underset{\mathcal{G}}{\times} \mathcal{F}, \pi, \mathcal{B})$ sur ξ.

Ainsi, *si un $\mathcal{G}$-espace $\mathcal{F}$ est topologiquement effectif, les ($\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$)-fibrés sont (à isomorphisme près) les fibrés localement triviaux de fibre $\mathcal{F}$ et de groupe structural $\mathcal{G}$.*

* * *

Voyons comment les ($\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$)-fibrés se réduisent à un sous-groupe $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$.

Un sous-groupe $\mathcal{H}$ muni d'une topologie induite est un groupe topologique qui opère continûment sur un $\mathcal{G}$-espace $\mathcal{F}$ (si bien que chaque $\mathcal{G}$-espace $\mathcal{F}$ est automatiquement un $\mathcal{H}$-espace). On voit de plus que si l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{F}$ est effective (resp. topologiquement effective), il en est de même pour $\mathcal{H}$.

On transforme chaque ($\mathcal{H}$, $\mathcal{F}$)-espace $\mathcal{Y}$ de façon unique en un ($\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$)-espace ayant le même nombre de points. A cet effet, on assimile toutes les applications $L_a \circ \mathrm{q}$, $\mathrm{q} \in \mathrm{Coor}\, \mathcal{Y}$, $a \in \mathcal{G}$, à des isomorphismes de coordonnées. (On souligne que $\mathcal{F}$ est supposé dès le début être un $\mathcal{G}$-espace.) Chaque ($\mathcal{H}$, $\mathcal{F}$)-isomorphisme de ($\mathcal{H}$, $\mathcal{F}$)-espaces est évidemment un ($\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$)-isomorphisme de ($\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$)-espaces correspondants. Si l'on transforme de cette façon toutes les fibres d'un ($\mathcal{H}$, $\mathcal{F}$)-fibré en des ($\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$)-espaces, on obtient donc un ($\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$)-fibré (admettant les mêmes trivialisations (U_α, φ_α)).

Dans ce sens, *chaque* $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$*-fibré est un* $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$*-fibré*.

Inversement, on transforme chaque $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-espace $\mathcal{X}$ en un $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$-espace $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}$ ayant le même nombre de points si l'on choisit un isomorphisme de coordonnées $p_0 \in \operatorname{Coor} \mathcal{X}$ quelconque et si l'on se borne aux isomorphismes de la forme $L_a \circ p_0$, où $a \in \mathcal{H}$. Mais *la transformation n'est pas unique*. Elle dépend du choix de p_0, et les $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-isomorphismes ne sont pas nécessairement des $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$-isomorphismes.

Problème 8. Montrer que deux isomorphismes $p_0, p_1 \in \operatorname{Coor} \mathcal{X}$ conduisent à un même $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$-espace $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}$ si et seulement si l'élément $a \in \mathcal{G}$ de la relation $p_1 = L_a \circ p_0$ appartient au sous-groupe $\mathcal{H}$.

[Ainsi, les différentes $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$-structures sur $\mathcal{X}$ obtenues à partir d'une même $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-structure sont en correspondance biunivoque avec les points de l'espace $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ des classes à gauche de $\mathcal{G}$ suivant le sous-groupe $\mathcal{H}$.]

Si l'on veut transformer un $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibré donné $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ en un $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$-fibré, on doit définir une $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$-structure sur toutes les fibres $\mathcal{F}_b$, $b \in \mathcal{B}$, à la fois de façon que toutes les applications (2) soient des $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$-isomorphismes pour au moins un atlas trivialisant $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de ξ. Cela ne se fait pas toujours. Témoin les fibrés vectoriels.

Définition 5. Nous dirons qu'un $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibré *se réduit à un sous-groupe* $\mathcal{H}$ (ou à un $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$-fibré η) s'il existe un $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$-fibré η qui se transforme en un fibré ξ lorsqu'on définit sur ses fibres une $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-structure. Nous dirons que le fibré η est une $\mathcal{H}$*-réduction* de ξ et que ξ est une $\mathcal{G}$*-extension* du fibré η.

On souligne qu'une $\mathcal{G}$-extension existe nécessairement (lorsque $\mathcal{F}$ est muni de la structure de $\mathcal{G}$-espace) et qu'elle est définie de façon unique, tandis que dans le second cas l'existence n'est pas garantie, et une $\mathcal{H}$-réduction, quand elle existe, n'est pas unique en général.

On note de plus que les espaces totaux, les bases et les projections des fibrés ξ et η coïncident, i.e. ξ et η ne diffèrent que par les $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-structures.

On constate sans peine (voir proposition 1 de la leçon 7) que *si un* $\mathcal{G}$*-espace* $\mathcal{F}$ *est topologiquement effectif, alors un* $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$*-fibré* ξ *se réduit au sous-groupe* $\mathcal{H}$ *si et seulement s'il existe un atlas trivialisant* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *tel que le cocycle de recollement associé* $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ *prenne ses valeurs dans* $\mathcal{H}$. En effet, si une $\mathcal{H}$-réduction η existe, tout atlas trivialisant du fibré η jouit de cette propriété. Inversement, si $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ existe, le $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$-fibré η, déduit du cocycle $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ considéré comme cocycle sur le groupe $\mathcal{H}$, est une $\mathcal{H}$-réduction du fibré ξ. □

* * *

On peut maintenant passer aux fibrés principaux associés ξ, η.

Définition 6. On dit qu'un $\mathcal{G}$-fibré principal localement trivial ξ *se réduit à un sous-groupe* $\mathcal{H}$ s'il existe un atlas trivialisant $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tel que le cocycle de recollement associé $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ soit à valeurs dans $\mathcal{H}$. Dans ce cas, le cocycle $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ définit un $\mathcal{H}$-fibré principal localement trivial η appelé *$\mathcal{H}$-réduction* du fibré ξ.

Comme les cocycles de recollement de ξ et η s'identifient, on a le résultat suivant: *si un $\mathcal{G}$-espace $\mathcal{F}$ est topologiquement effectif, alors le $(\mathcal{H}, \mathcal{F})$-fibré $\eta = \eta\,[\mathcal{F}]$ est une $\mathcal{H}$-réduction du $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibré $\xi = \xi\,[\mathcal{F}]$ si et seulement si le $\mathcal{G}$-fibré principal η est une $\mathcal{H}$-réduction du $\mathcal{G}$-fibré principal ξ.*

On se borne donc aux réductions des fibrés principaux.

Remarque 3. On tient à signaler que *les espaces totaux des fibrés ξ et η sont différents* (pour $\mathcal{H} \neq \mathcal{G}$) contrairement au cas des $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-fibrés. En effet, on a $\xi = \xi\,[\mathcal{G}]$ (voir exemple 6 de la leçon 1), si bien que l'espace total $\mathscr{E}^\xi$ de ξ coïncide avec celui du fibré $\eta\,[\mathcal{G}]$ ($\mathcal{G}$ étant considéré comme $\mathcal{H}$-espace à gauche), et il diffère manifestement de $\mathscr{E}^\eta$ (espace total de $\eta = \eta\,[\mathcal{H}]$).

Par définition, $\mathscr{E}^\xi = \mathscr{E}^{\xi[\mathcal{G}]} = \mathscr{E}^{\eta[\mathcal{G}]}$ est l'espace quotient de $E = \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathcal{G})$, et $\mathscr{E}^\eta = \mathscr{E}^{\eta[\mathcal{H}]}$ celui de $H = \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathcal{H})$, sous-espace de E. Comme ces passages au quotient coïncident évidemment sur H, l'inclusion $H \subset E$ induit l'application fibre à fibre

$$\chi : \mathscr{E}^\eta \to \mathscr{E}^\xi \tag{3}$$

qui est

a) un homéomorphisme sur son image;

b) équivariante relativement à l'action du groupe $\mathcal{H}$, i.e. χ jouit de la propriété:

$$\chi\,(\mathrm{q}h) = \chi\,(\mathrm{q})\,h$$

pour tout point $\mathrm{q} \in \mathscr{E}^\eta$ et tout élément $h \in \mathcal{H}$.

Nous dirons que l'application (3) *réduit* le fibré ξ au fibré η. [On note que généralement (3) dépend du choix du cocycle de recollement $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$.]

On voit de suite que l'existence de (3) est une condition non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour que ξ se réduise à η, i.e. *le $\mathcal{H}$-fibré principal η est une $\mathcal{H}$-réduction du $\mathcal{G}$-fibré principal ξ si et seulement s'il existe au moins une application de réduction* (3). En effet, on vérifie aisément (le démontrer!) que pour toute application (3) la formule

$$[\mathrm{q}, a]_{\mathcal{H}} \to \chi\,(\mathrm{q})\,a, \quad \mathrm{q} \in \mathscr{E}^\eta, \quad a \in \mathcal{G},$$

définit bien un $\mathcal{G}$-isomorphisme $\eta[\mathcal{G}] \to \xi$. Aussi, on choisit pour ξ et $\eta[\mathcal{G}]$ les cocycles de recollement identiques. D'où le résultat cherché car tout cocycle de recollement de $\eta[\mathcal{G}]$ prend évidemment ses valeurs dans le groupe $\mathcal{H}$. □

Il est maintenant loisible de définir une $\mathcal{H}$-réduction pour tout $\mathcal{G}$-fibré principal (non nécessairement localement trivial).

Définition 7. Un $\mathcal{H}$-fibré principal η est une *$\mathcal{H}$-réduction* d'un $\mathcal{G}$-fibré principal ξ s'il existe au moins une application de réduction (3).

Les résultats obtenus impliquent que s'agissant des fibrés principaux localement triviaux, cette définition est équivalente à la définition précédente. [N'oublions cependant pas qu'un $\mathcal{G}$-fibré principal localement trivial qui n'admet pas de $\mathcal{H}$-réduction localement triviale, peut en posséder d'autres, celles-ci n'étant pas localement triviales.]

Problème 9. Montrer que *pour tout $\mathcal{H}$-fibré principal η (localement trivial ou non), il existe un $\mathcal{G}$-fibré principal ξ tel que η en soit une $\mathcal{H}$-réduction, qui est localement trivial si le fibré η l'est.* [*Indication.* Assimiler l'espace total $\mathscr{E}^{\xi}$ de ξ à l'espace total $\mathscr{E}^{\eta} \underset{\mathcal{H}}{\times} \mathcal{G}$ du fibré $\eta[\mathcal{G}]$ ($\mathcal{G}$ étant naturellement un $\mathcal{H}$-espace à gauche); définir l'action du groupe $\mathcal{G}$ sur $\mathscr{E}$ par la formule

$$[q, g]_{\mathcal{H}} a = [q, ga]_{\mathcal{H}}, \quad q \in \mathscr{E}^{\eta}, \quad g, a \in \mathcal{G},$$

qui est licite (on le constate aisément), et l'application (3) par

$$\chi(q) = [q, e]_{\mathcal{H}}, \quad q \in \mathscr{E}^{\eta},$$

avec e l'unité de $\mathcal{G}$.]

Problème 10. Démontrer qu'un *$\mathcal{G}$-fibré principal ξ est réduit au sous-groupe unité $\{e\}$ si et seulement s'il est trivial.* [*Indication.* Lorsque $\mathcal{H} = \{e\}$, l'application (3) est une section de ξ.]

Puisque $\mathcal{H}$ opère sur $\mathscr{E} = \mathscr{E}^{\xi}$, on définit l'espace quotient $\mathscr{E}/\mathcal{H}$. Ce faisant, comme chaque $\mathcal{H}$-orbite $p\mathcal{H}$ est contenue dans la $\mathcal{G}$-orbite $p\mathcal{G}$ unique, la correspondance $p\mathcal{H} \mapsto p\mathcal{G}$ définit une application $\pi: \mathscr{E}/\mathcal{H} \to \mathscr{B}$ d'où le fibré

$$\xi/\mathcal{H} = (\mathscr{E}/\mathcal{H}, \pi, \mathscr{B}).$$

D'autre part, le groupe $\mathcal{G}$ opère de manière naturelle continue à gauche sur $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ (par la formule

$$a(g\mathcal{H}) = (ag)\mathcal{H},$$

avec $a, g \in \mathcal{G}$). Cela définit le fibré

$$\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}] = (\mathscr{E} \underset{\mathcal{G}}{\times} (\mathcal{G}/\mathcal{H}), \pi, \mathscr{B}).$$

Problème 11. Montrer que *les fibrés* $\xi/\mathcal{H}$ *et* $\xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$ *sont canoniquement isomorphes.* [*Indication.* L'isomorphisme $\mathcal{E}/\mathcal{H} \to \mathcal{E} \underset{\mathcal{G}}{\times} (\mathcal{G}/\mathcal{H})$ est donné par

$$\mathrm{p}\mathcal{H} \mapsto [\mathrm{p}, \mathcal{H}]_{\mathcal{G}},$$

et l'isomorphisme réciproque $\mathcal{E} \underset{\mathcal{G}}{\times} (\mathcal{G}/\mathcal{H}) \to \mathcal{E}/\mathcal{H}$ par

$$[\mathrm{p}, g\mathcal{H}]\,\mathcal{G} \mapsto (\mathrm{p}g)\mathcal{H},$$

où $\mathrm{p} \in \mathcal{E}$, $g \in \mathcal{G}$.]

Si $\mathcal{H} = \{e\}$, on a l'affirmation de l'exemple 6, leçon 1.

Problème 12 (**problème 9 généralisé**). Montrer qu'*un* $\mathcal{G}$*-fibré principal* ξ *est réduit au sous-groupe* $\mathcal{H}$ *si et seulement si le fibré* $\xi/\mathcal{H} = \xi[\mathcal{G}/\mathcal{H}]$ *admet une section.*

[*Indication.* Pour toute application de réduction (3), la formule

$$f(\mathrm{p}) = \tau(\mathrm{p}, \chi(\mathrm{q}))\,\mathcal{H}, \quad \mathrm{p} \in \mathcal{E} = \mathcal{E}^{\xi},$$

avec q un point de $\mathcal{E}^{\eta}$ tel que $\pi(\mathrm{q}) = \pi(\mathrm{p})$ (τ étant toujours une translation), définit bien l'application $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$ qui vérifie la relation (14) de la leçon 1. Inversement, pour toute f ainsi définie, le sous-espace $\mathcal{E}^{\eta}$ de $\mathcal{E}$, formé de points $\mathrm{p} \in \mathcal{E}$ tels que $f(\mathrm{p}) = \mathcal{H}$, constitue un $\mathcal{H}$-espace principal, et l'injection $\mathcal{E}^{\eta} \to \mathcal{E}^{\xi}$ est une réduction.]

(Cf. phrase entre crochets du problème 8.)

Problème 13. On suppose que le $\mathcal{G}$-fibré principal ξ et le $\mathcal{H}$-fibré principal $(\mathcal{G}, \pi, \mathcal{G}/\mathcal{H})$ (voir exemple 2 de la leçon 1) sont localement triviaux. Montrer que *si, avec l'hypothèse faite, le fibré* $\mathcal{E}/\mathcal{H}$ *possède une section, il existe pour* ξ une $\mathcal{H}$*-réduction* η, $\mathcal{H}$*-fibré principal localement trivial.*

Problème 14. Démontrer que si η *est une réduction de* ξ, *alors quel que soit le* $\mathcal{G}$*-espace à gauche* $\mathcal{F}$, *les fibrés* $\eta[\mathcal{F}]$ et $\xi[\mathcal{F}]$ *sont isomorphes en tant que fibrés sans groupe structural* (il existe l'homéomorphisme fibre à fibre

$$\varphi\colon \mathcal{E}^{\eta} \underset{\mathcal{H}}{\times} \mathcal{F} \to \mathcal{E}^{\xi} \underset{\mathcal{G}}{\times} \mathcal{F}$$

qui n'est pas lié en général avec les actions des groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$). [*Indication.* L'application φ est définie par la formule

$$\varphi([\mathrm{q}, x]_{\mathcal{H}}) = [\chi(\mathrm{q}), x]_{\mathcal{G}}, \quad \mathrm{q} \in \mathcal{E}^{\eta}, \quad x \in \mathcal{F},$$

avec χ l'application de réduction (3). χ est évidemment continue, bijective et s'effectue fibre à fibre. On n'a donc à prouver que la continuité de l'application réciproque. Il suffit de trouver pour tout voisinage W d'un point $[\mathrm{q}_0, x_0]_{\mathcal{H}}$ quelconque de $\mathcal{E}^{\eta} \underset{\mathcal{H}}{\times} \mathcal{F}$ un voisinage U d'un point $\mathrm{p}_0 = \chi(\mathrm{q}_0)$ de $\mathcal{E}^{\xi}$ et un voisinage V d'un point x_0 de $\mathcal{F}$ tels que $[\mathrm{p}, x]_{\mathcal{G}} \in \varphi(W)$ pour tout $\mathrm{p} \in U$ et tout $x \in V$. Soient W_1 un voisinage de $\mathrm{q}_0 \in \mathcal{E}^{\eta}$ et W_2 un voisinage de $x_0 \in \mathcal{F}$ tels que $[\mathrm{q}, x]_{\mathcal{H}} \in W$ quels que soient $\mathrm{q} \in W_1$ et $x \in W_2$. Assimiler V à un voisinage de x_0 pour lequel le groupe $\mathcal{G}$ contient un voisinage symétrique O ($O^{-1} = O$) de l'unité tel que $OV_2 \subset W_2$. Assimiler à son tour U à un voisinage de p_0 ayant la propriété suivante: $\pi^{\xi}(U) \subset \pi^{\eta}(W_1)$ et $\tau((U \times U) \cap \mathcal{E}^*) \subset O$, avec τ la translation pour ξ.]

* * *

On note l'intérêt particulier du cas où ξ est un fibré des repères $\tau_{\mathscr{X}}$ associé au fibré tangent $\tau_{\mathscr{X}}$ sur une variété différentiable séparée paracompacte $\mathscr{X}$, et $\mathscr{G} = \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, $\mathscr{H} = \mathrm{GL}^+(n; \mathbb{R})$ (ou, ce qui revient au même, $\mathscr{G} = \mathrm{O}(n)$, $\mathscr{H} = \mathrm{SO}(n)$). Dans ce cas, l'espace quotient $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ est le groupe C_2 d'ordre 2, et le $\mathscr{H}$-fibré principal $(\mathscr{G}, \pi, \mathscr{G}/\mathscr{H})$ est trivial (donc localement trivial). Par conséquent, les affirmations des problèmes 12 et 13 font que *le fibré* $\tau_{\mathscr{X}}$ (et, partant, $\tau_{\mathscr{X}}$) *est réductible au groupe* SO (n) (*la variété* $\mathscr{X}$ *est orientable*) *si et seulement si le fibré* $\tau_{\mathscr{X}}/\mathrm{SO}(n) = \tau_{\mathscr{X}}[C_2]$ *admet une section.*

Problème 15. Démontrer directement la dernière affirmation. (Ce problème est destiné à ceux qui ont passé outre aux cas 12 et 13.)

Le fibré $\tau_{\mathscr{X}}[C_2]$ représente (on le constate facilement) un C_2-fibré principal. Aussi possède-t-il une section sous la condition nécessaire et suffisante d'être trivial.

On suppose $\mathscr{X}$ connexe.

Problème 16. Montrer qu'*un C_2-fibré sur $\mathscr{X}$ connexe est non trivial si et seulement si son espace total est connexe* (il s'agit donc d'un revêtement).

Ainsi, on a construit pour toute variété connexe non orientable $\mathscr{X}$ un revêtement à deux feuillets $\tau_{\mathscr{X}}[C_2] = (\tilde{\mathscr{X}}, \pi, \mathscr{X})$ parfaitement déterminé.

Problème 17. Montrer que *l'espace total $\tilde{\mathscr{X}}$ du revêtement $\tau_{\mathscr{X}}[C_2]$ est une variété orientable.*

Finalement, on a la

Proposition 1. *Pour toute variété connexe non orientable $\mathscr{X}$, il existe une variété orientable $\tilde{\mathscr{X}}$ qui est un revêtement à deux feuillets de $\mathscr{X}$.*

Problème 18. Démontrer que *le revêtement $(\tilde{\mathscr{X}}, \pi, \mathscr{X})$ est unique à un isomorphisme près.*

La variété $\mathscr{X}$ (orientable ou non) admet certes de nombreux revêtements à deux feuillets. Si $\mathscr{X}$ est orientable, ils le sont également (pourquoi?), et un seul d'eux est orientable dans le cas contraire.

Problème 19. Démontrer la dernière affirmation.

LEÇON 10

Image réciproque d'un fibré vectoriel. — Fibrés vectoriels différentiables. — Champs de sous-espaces horizontaux. — Connexions et leurs formes. — Image réciproque d'une connexion. — Connexions sur un fibré complexe ξ et sur son décomplexifié $\xi_{\mathbb{R}}$.— Diagonalisation d'une connexion.

Revenons aux fibrés vectoriels (sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On rappelle (voir définition 2 de la leçon 6) qu'un *morphisme* $\varphi: \eta \to \xi$ d'un fibré vectoriel η dans un fibré vectoriel ξ est une application continue fibre à fibre $\mathscr{E}^{\eta} \to \mathscr{E}^{\xi}$ linéaire sur chaque fibre. Chaque morphisme $\varphi: \eta \to \xi$ induit l'application continue $\hat{\varphi}: \mathscr{B}^{\eta} \to \mathscr{B}^{\xi}$ de la dernière ligne du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}^{\eta} & \xrightarrow{\varphi} & \mathscr{E}^{\xi} \\ \pi^{\eta} \downarrow & & \downarrow \pi^{\xi} \\ \mathscr{B}^{\eta} & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \mathscr{B}^{\xi} \end{array}$$

et, pour tout point $b \in \mathscr{B}^{\eta}$, l'application linéaire

$$\varphi_b : \mathscr{F}_b^{\eta} \to \mathscr{F}_{\hat{\varphi}(b)}^{\xi}$$

de la fibre $\mathscr{F}_b^{\eta}$ de η sur la fibre $\mathscr{F}_{\hat{\varphi}(b)}^{\xi}$ de ξ.

Les morphismes $\varphi : \eta \to \xi$ pour lesquels toutes les applications φ_b, $b \in \mathscr{B}^{\eta}$, sont des isomorphismes, jouent un rôle particulièrement important. On ne leur connaît malheureusement pas de nom réussi universellement admis. Aussi, nous les appellerons (faute de mieux) *morphismes réguliers*.

Conformément au problème 4 de la leçon 6, les isomorphismes de fibrés vectoriels sur $\mathscr{B}$ sont exactement les morphismes réguliers et, en même temps, des morphismes sur $\mathscr{B}$.

Les applications $\hat{\varphi} : \mathscr{B}^{\eta} \to \mathscr{B}^{\xi}$ induites par les morphismes réguliers ne sont assujetties en général à aucune condition.

Proposition 1. *Pour tout fibré vectoriel* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *et toute application continue* $f : \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$, *il existe un fibré vectoriel* $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B}')$ *sur* $\mathscr{B}'$ *et un morphisme régulier* $\varphi : \xi' \to \xi$ *qui induit*

l'application f :

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{E}' & \xrightarrow{\varphi} & \mathscr{E} \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathscr{B}' & \xrightarrow{f} & \mathscr{B} \end{array}$$

Le fibré ξ' est défini de façon unique à un isomorphisme près.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\mathscr{E}'$ un sous-espace de $\mathscr{E} \times \mathscr{B}'$ formé de points (p, b'), $p \in \mathscr{E}$, $b' \in \mathscr{B}'$, tels que $\pi(p) = f(b')$, et soit $\pi'(p, b') = b'$, $\varphi(p, b') = p$. Il est clair que π' et φ sont continues et qu'il y a commutativité du diagramme (1) (ce qui signifie que φ est un morphisme du fibré $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B}')$ dans le fibré $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, qui induit f).

Quel que soit le point $b' \in \mathscr{B}'$, la fibre $(\pi')^{-1}(b') = \mathscr{F}'_{b'}$ de ξ' au-dessus de b' est composée de tous les points (p, b') (p étant un point quelconque de la fibre $\mathscr{F}_b = \pi^{-1}(b)$ de ξ au-dessus de b, $b = f(b')$) et l'application $\varphi_{b'} : \mathscr{F}'_{b'} \to \mathscr{F}_b$ est une bijection définie par $(p, b') \mapsto p$. On munit $\mathscr{F}'_{b'}$ par $\varphi_{b'}$ d'une structure d'espace vectoriel obtenue à partir de celle de $\mathscr{F}_b$, ce qui transforme les fibres $\mathscr{F}'_{b'}$ en des espaces vectoriels et les applications $\varphi_{b'}$ en des isomorphismes, si bien que le morphisme φ devient un morphisme régulier.

Problème 1. Démontrer que

1° *Pour tout atlas trivialisant $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ du fibré ξ, les couples $(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)$, où $U'_\alpha = f^{-1}U_\alpha$, $\varphi'_\alpha(b', \mathbf{x}) = (\varphi_\alpha(f(b'), \mathbf{x}), \mathbf{x})$, $b' \in U'_\alpha$, $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, constituent un atlas trivialisant du fibré ξ'.*

2° *Le cocycle de recollement*

$$\{\varphi'_{\beta\alpha} : U'_\alpha \cap U'_\beta \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})\}$$

de l'atlas $\{(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$ est lié au cocycle de recollement

$$\{\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})\}$$

de l'atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ par l'égalité

$$(2)\qquad \varphi'_{\beta\alpha} = \varphi_{\beta\alpha} \circ f$$

(qui doit avoir lieu pour tout α et tout β; plus précisément, les cocycles sont liés par $\varphi'_{\beta\alpha} = \varphi_{\beta\alpha} \circ f_{\beta\alpha}$, avec $f_{\beta\alpha}$ la restriction à $U'_\alpha \cap U'_\beta$ de f considérée comme application dans $U_\alpha \cap U_\beta$).

Par suite de 1°, le fibré ξ' est localement trivial. C'est donc un fibré vectoriel.

Si $\psi : \eta \to \xi$ est un morphisme arbitraire de fibrés vectoriels qui induit f, la formule

$$\chi(q) = (\pi^\eta(q), \psi(q)), \quad q \in \mathscr{E}^\eta,$$

définit évidemment le morphisme $\chi : \eta \to \xi'$ sur $\mathscr{B}'$ tel que $\psi = \varphi \circ \chi$ et, partant, régulier (i.e. il s'agit d'un isomorphisme) lorsque le

morphisme ψ l'est. Par conséquent, le fibré ξ' est unique à un isomorphisme près. □

Définition 1. Le fibré ξ' ainsi construit est l'*image réciproque* du fibré ξ par l'application f. Il est noté $f^*\xi$, et le symbole $f^!$ désigne le morphisme $\varphi : \xi' \to \xi$.

[Le résultat obtenu aidant, on dit que pour tout morphisme $\psi : \eta \to \xi$ de fibrés vectoriels induisant f, il existe un seul morphisme $\chi : \eta \to f^*\xi$ sur $\mathscr{B}'$, qui vérifie

$$\psi = f^! \circ \chi.$$

Cela signifie en termes de catégories que le diagramme commutatif (1) est un *carré cocartésien*. On dit également que le fibré $f^*\xi$ est le *coamalgame* du diagramme $\mathscr{B}' \xrightarrow{f} \mathscr{B} \xleftarrow{\pi} \mathscr{E}$. (Certains auteurs particularisent $f^*\xi$ par un terme qui est une traduction littérale du « produit fibré » des Français (et du terme correspondant des ouvrages en anglais où on ne le rencontre d'ailleurs plus). Peu heureux même quand il s'agit des fibrés, ce terme ne convient absolument pas pour les catégories arbitraires.)]

Problème 2. Démontrer que *pour n'importe quelles applications $g : \mathscr{B}'' \to \mathscr{B}'$ et $f : \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$, le fibré $(f \circ g)^* \xi$ est canoniquement isomorphe au fibré $g^* (f^* \xi)$* (si bien qu'on peut les identifier).

* * *

Soit $\mathscr{B}$ une variété différentiable de dimension m.

Définition 2. Un fibré vectoriel $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ de rang n sur $\mathscr{B}$ est dite *différentiable* si l'on trouve un atlas trivialisant $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tel que le cocycle matriciel associé soit formé d'applications différentiables

$$\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}\,(n;\, \mathbb{K}), \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{H}.$$

Remarque 1. On prouve que *tout fibré vectoriel* sur une variété différentiable séparée paracompacte *est isomorphe à un fibré différentiable.*

Comme tout recouvrement ouvert plus fin que $\{U_\alpha\}$ de $\mathscr{B}$ est un recouvrement trivialisant (par rapport aux restrictions correspondantes des trivialisations φ_α) tel que les fonctions de transition soient ou des fonctions constantes (identiquement égales à l'unité du groupe $\mathrm{GL}\,(n;\, \mathbb{K})$) ou des restrictions des fonctions de transition $\varphi_{\beta\alpha}$, *on suppose sans restreindre la généralité que le recouvrement $\{U_\alpha\}$ de la définition 2 est composé de voisinages de coordonnées de $\mathscr{B}$.* Il y a plus. Ces voisinages sont supposés, si besoin est, connexes (par arcs), voire difféomorphes à la boule $\mathring{\mathbb{B}}^n$.

Selon la formule (2), *le fibré induit $f^*\xi$ est différentiable s'il en est ainsi pour tout fibré vectoriel $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ et toute application $f : \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$.*

Lorsque l'espace $\mathscr{E}$ est une variété différentiable, on dit qu'une trivialisation $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$ du fibré vectoriel $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$

sur un ensemble ouvert $U_\alpha \subset \mathscr{B}$, est *différentiable* si elle est un difféomorphisme de la variété différentiable $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ sur la variété différentiable $\mathscr{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}U_\alpha$ (où $\mathbb{K}^n$ est considéré pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ comme une variété réelle de dimension $2n$ ou $4n$ respectivement).

Proposition 2. *Pour tout* $\mathbb{K}$*-fibré vectoriel différentiable* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *de rang n sur la variété différentiable* $\mathscr{B}$ *de dimension m, l'espace* $\mathscr{E}$ *est muni (évidemment de façon unique) d'une structure de variété différentiable* $(m + dn)$*-dimensionnelle,* $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$, *par rapport à laquelle toutes les trivialisations*

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$$

de l'atlas trivialisant de la définition 2 sont différentiables.

Inversement, si, pour le fibré vectoriel $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, *l'espace* $\mathscr{E}$ *constitue une variété différentiable U et s'il existe un atlas trivialisant* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *tel que toutes les trivialisations* φ_α *soient différentiables, alors le fibré* ξ *l'est également.*

Ainsi, les deux politiques pour définir un fibré vectoriel différentiable aboutissent au même résultat.

Le lemme ci-dessous est la clé qui permet de prouver la proposition 2 (cf. lemme 1 de la leçon 6).

Lemme 1. *L'application*

$$\varphi : U \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$$

d'une variété différentiable U dans le groupe $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ *est différentiable si et seulement s'il en est de même pour l'application*

$$\Phi : U \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

définie par la formule

$$\Phi(b, \mathbf{x}) = \varphi(b)\mathbf{x}, \quad b \in U, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n.$$

D é m o n s t r a t i o n. Le caractère local de la différentiabilité fait qu'il suffit de démontrer le lemme pour U un voisinage de coordonnées, i.e. pour U un ensemble ouvert de l'espace $\mathbb{R}^m$. Or, dire que l'application φ est différentiable, c'est dire que les éléments $\varphi_i^j(b)$ de la matrice $\varphi(b)$, $b \in U$, sont des fonctions différentiables des composantes $b^1, \ldots, b^m$ du vecteur b, et la propriété d'être différentiable de l'application Φ signifie que ce sont les composantes $\varphi_i^j(b)x^i$ du vecteur $\varphi(b)\mathbf{x}$ qui constituent des fonctions différentiables des coordonnées $b^1, \ldots, b^m, x^1, \ldots, x^n$ des vecteurs $b \in U$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Il ne nous reste qu'à signaler l'équivalence évidente de ces deux conditions. □

Quand $U = U_\alpha \cap U_\beta$ et $\varphi = \varphi_{\beta\alpha}$, les applications Φ et

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^n \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^n \tag{3}$$

sont liées par la formule

$$(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(b, \mathbf{x}) = (b, \Phi(b, \mathbf{x})), \quad b \in U_\alpha \cap U_\beta, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n,$$

si bien qu'elles sont différentiables, ou non différentiables, en même temps. Par conséquent, *le fibré vectoriel* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *est différentiable si et seulement s'il existe pour* ξ *un atlas trivialisant* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *tel que toutes les applications* (3) *soient différentiables (et constituent donc des difféomorphismes).*

D é m o n s t r a t i o n d e l a p r o p o s i t i o n 2. La deuxième affirmation découle de suite de la dernière phrase en italique. On passe à la première affirmation, et on note une fois de plus que chaque voisinage trivialisant U_α peut être supposé être, sans nuire à la généralité de l'exposé, un voisinage de coordonnées.

Soit $h_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^m$ l'application correspondante, et soit

$$g_\alpha = (h_\alpha \times \mathrm{id}) \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathscr{E}_{U_\alpha} \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{K}^n = \mathbb{R}^{m+dn},$$

l'application définie par

$$g_\alpha(p) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}), \quad p \in \mathscr{E}_{U_\alpha}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{K}^n = \mathbb{R}^{dn},$$

avec $\mathbf{x} = h_\alpha(b)$, $(b, \mathbf{a}) = \varphi_\alpha(p)$, et $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ (i.e. $d = 1$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $d = 2$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On conçoit que g_α est un homéomorphisme de l'ensemble ouvert $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ sur l'ouvert $h_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^{dn}$ de l'espace $\mathbb{R}^{m+dn}$, i.e. autrement dit, le couple $(\mathscr{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ est une carte de $\mathscr{E}$ compatible avec la topologie de $\mathscr{E}$.

Comme $\mathscr{E}_{U_\alpha} \cap \mathscr{E}_{U_\beta} = \mathscr{E}_{U_\alpha \cap U_\beta}$, on a $\mathscr{E}_{U_\alpha} \cap \mathscr{E}_{U_\beta} \neq \varnothing$ si et seulement si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, auquel cas

$$(g_\beta \circ g_\alpha^{-1})(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = ((h_\beta \circ h_\alpha^{-1})\mathbf{x}, \ \varphi_{\beta\alpha}(b)\mathbf{a})$$

pour tout point $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \in h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n = g_\alpha(\mathscr{E}_{U_\alpha} \cap \mathscr{E}_{U_\beta})$, où $b = h_\alpha^{-1}(\mathbf{x})$.

En coordonnées, cette formule s'écrit comme égalités

$$a^{i'} = \varphi_{\beta\alpha}(\mathbf{x})_i^{i'} a^i, \quad x^{k'} = x^{k'}(\mathbf{x}), \quad i, i' = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

où a^i et x^k sont les composantes des vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{x}$ (a^i sont réelles pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et complexes si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et x^k sont toujours réelles);

$a^{i'}$ et $x^{k'}$ sont les composantes des vecteurs $\varphi_{\beta\alpha}(b)\mathbf{a}$ et $(h_\beta \circ h_\alpha^{-1})\mathbf{x}$;

$\varphi_{\beta\alpha}(\mathbf{x})_i^{i'}$ sont les fonctions qui représentent par les coordonnées locales les éléments $\varphi_{\beta\alpha}(b)_i^{i'}$ de la matrice $\varphi_{\beta\alpha}(b) \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$;

$x^{k'}(\mathbf{x})$ sont les fonctions représentant en coordonnées le difféomorphisme $h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$.

Cela prouve la différentiabilité des applications $g_\beta \circ g_\alpha^{-1}$ (qui sont donc des difféomorphismes), i.e. la compatibilité des cartes $(\mathscr{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ et $(\mathscr{E}_{U_\beta}, g_\beta)$.

Comme les ouverts $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ recouvrent l'espace $\mathscr{E}$, les cartes $(\mathscr{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ constituent un atlas qui définit dans $\mathscr{E}$ une structure différen-

tiable compatible avec la topologie. Dans la carte $(\mathscr{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ chaque point $p \in \mathscr{E}_{U_\alpha}$ a les coordonnées locales

$$(5) \qquad a^1, \ldots, a^n, x^1, \ldots, x^m,$$

avec $a^1, \ldots, a^n$ les composantes du vecteur $\mathbf{a} = \varphi_{\beta\alpha}(p)$, et $x^1, \ldots, x^m$ les coordonnées dans (U_α, h_α) du point $b = \pi(p)$. Les nombres (5) sont également les coordonnées sur $U_\alpha \times \mathbb{K}^n$, et l'application φ_α envoie chaque point de $U_\alpha \times \mathbb{K}^n$ dans un point de mêmes coordonnées de $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ (c'est une application par égalité des coordonnées). φ_α est donc un difféomorphisme. Ainsi, la proposition 2 est démontrée. □

Le *fibré tangent* $\tau_{\mathscr{B}} = (\mathrm{T}\mathscr{B}, \pi, \mathscr{B})$ (voir exemple 2 de la leçon 6) est un exemple d'un fibré vectoriel différentiable (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Dans la suite, nous supposerons toujours que l'espace $\mathscr{E}$ du fibré $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ est muni de la structure décrite de variété différentiable, et nous n'aurons affaire qu'aux trivialisations $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$ différentiables (sans l'expliciter dans certains cas).

Tous les morphismes $\eta \to \xi$ entre fibrés vectoriels différentiables seront supposés *différentiables*, i.e. ce seront des applications $\mathscr{E}^\eta \to \mathscr{E}^\xi$ différentiables.

Problème 3. Démontrer que

1° *Pour tout morphisme différentiable* $\varphi : \eta \to \xi$ *de fibrés vectoriels différentiables, l'application induite* $\hat{\varphi} : \mathscr{B}^\eta \to \mathscr{B}^\xi$ *est différentiable.*

2° *Pour toute application différentiable* $f : \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$ *et tout fibré vectoriel différentiable* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, *le morphisme* $f^! : f^*\xi \to \xi$ *est un morphisme différentiable.*

Remarque 2. On démontre que *sur une variété séparée paracompacte, les fibrés vectoriels différentiables isomorphes le sont différentiablement* (cf. remarque 1).

On note que les symboles $x^1, \ldots, x^m$ désignent non seulement une partie des coordonnées locales (5) dans $(\mathscr{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$, mais aussi les coordonnées locales dans (U_α, h_α) de la variété $\mathscr{B}$. Avec cette convention (qui ne conduit à aucune équivoque si l'on fait attention), la projection π s'écrit en coordonnées locales

$$(6) \qquad x^k = x^k, \quad k = 1, \ldots, m,$$

ce qui prouve que

a) *la projection* $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ *d'un fibré vectoriel différentiable* ξ *constitue une application différentiable qui est une submersion en chaque point* $p \in \mathscr{E}$;

b) *toutes les fibres* $\mathscr{F}_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in \mathscr{B}$, de ξ *sont des sous-variétés différentiables de dimension dn de* $\mathscr{E}$;

c) *pour tout point* $p \in \mathscr{F}_b$, *le sous-espace tangent* $\mathrm{T}_p\mathscr{F}_b$ *de* $\mathscr{F}_b$ *coïncide avec le noyau* Ker $(d\pi)_p$ *de la surjection linéaire*

$$(d\pi)_p : \mathrm{T}_p\mathscr{E} \to \mathrm{T}_b\mathscr{B}, \quad b = \pi(p).$$

Plus généralement, soit $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un fibré quelconque (au sens de la définition 1 de la leçon 1), où $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ sont des variétés de dimension $m + dn$ et m respectivement et $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ est une submersion. Nous dirons que ξ est *différentiable*.

Il est clair que les *affirmations* b), c) *sont justes pour tout* ξ *différentiable.*

En termes de suites exactes (voir leçon 4), l'affirmation c) signifie que, *pour tout point* $p \in \mathscr{F}_b$, *on a la suite exacte*

$$0 \to \mathbf{T}_p\mathscr{F}_b \xrightarrow{(d\iota_b)_p} \mathbf{T}_p\mathscr{E} \xrightarrow{(d\pi)_p} \mathbf{T}_b\mathscr{B} \to 0, \tag{7}$$

avec ι_b *l'injection* $\mathscr{F}_b \to \mathscr{E}$.

On a à signaler que s'agissant de ξ vectoriel, le terme $\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b$ de (7) (on l'appelle d'ordinaire *sous-espace vertical* de l'espace vectoriel $\mathbf{T}_p\mathscr{E}$) s'identifie de façon naturelle à l'espace vectoriel $\mathscr{F}_b$.

* * *

Si l'on associe à chaque point p d'une variété $\mathscr{E}$ de dimension $m + n$ un sous-espace m-dimensionnel H_p de $\mathbf{T}_p\mathscr{E}$, on définit ainsi sur $\mathscr{E}$ un *champ* H *de sous-espaces de dimension* m.

Problème 4. Soit V un ouvert de la variété $\mathscr{E}$. Montrer que *pour* H *ainsi défini il y a équivalence des conditions suivantes* :

1° *il existe sur* V *des formes différentielles linéaires différentiables* $\theta^1, \ldots, \theta^n$ *telles que le sous-espace* H_p *soit pour tout point* $p \in V$ *l'annulateur des covecteurs* $\theta^1_p, \ldots, \theta^n_p$:

$$H_p = \mathrm{Ann}\,(\theta^1_p, \ldots, \theta^n_p); \tag{8}$$

2° *il existe sur* V *des champs vectoriels différentiables* $X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}$ *tels que le sous-espace* H_p *soit engendré pour tout* $p \in V$ *par les vecteurs* $X^{(1)}_p, \ldots, X^{(m)}_p$:

$$H_p = [X^{(1)}_p, \ldots, X^{(m)}_p]. \tag{9}$$

Un champ

$$H : p \mapsto H_p, \quad p \in \mathscr{E}, \tag{10}$$

est *différentiable* si la variété $\mathscr{E}$ possède un recouvrement ouvert $\{V_\alpha\}$ tel que le champ H vérifie au-dessus de chacun de ses éléments les conditions a) et (ou) b).

Si $\mathscr{E}$ est l'espace total d'un fibré (non nécessairement vectoriel) différentiable ξ (si bien qu'on définit en chaque point $p \in \mathscr{E}$ un sous-espace vertical $\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b$, $b = \pi(p)$) et qu'on ait pour tout $p \in \mathscr{E}$

$$\mathbf{T}_p\mathscr{E} = \mathbf{T}_p\mathscr{F}_b \oplus H_p \tag{11}$$

(H_p est le supplémentaire de $\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b$), le champ (10) s'appelle *champ de sous-espaces horizontaux.*

Puisque Ker $(d\pi)_p = \mathbf{T}_p\mathcal{F}_b$, l'application linéaire $d\pi_p$ est sur chaque H_p un isomorphisme.

Le choix des sous-espaces horizontaux H_p comporte (soulignons ce fait) un arbitraire sensible, i.e. il existe sur $\mathscr{E}$ beaucoup de champs (10) (même différentiables) soumis à la condition (11), tandis que les sous-espaces verticaux $\mathbf{T}_p\mathcal{F}_b$ sont définis de façon unique.

Si l'on se donne un champ H de sous-espaces horizontaux, chaque champ vectoriel X sur $\mathscr{E}$ admet une représentation unique

$$X = X^V + X^H, \tag{12}$$

avec X^V et X^H des champs sur $\mathscr{E}$ tels que, quel que soit $p \in \mathscr{E}$, le vecteur X_p^V soit vertical et X_p^H, horizontal.

Problème 5. Démontrer que

1° *Un champ H de sous-espaces horizontaux est différentiable si et seulement s'il en est de même des X^V et X^H pour tout champ vectoriel différentiable X sur $\mathscr{E}$.*

2° *Si H est différentiable, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi pour X est la propriété d'être différentiable des champs X^V et X^H.*

Nous définirons de règle les champs de sous-espaces horizontaux par des formules (8), et nous assimilerons V à des ensembles ouverts de la forme $\mathscr{E}_U$, $U \subset \mathscr{B}$. Nous dirons par abus de langage que ce champ est l'*annulateur des formes* $\theta^1, \ldots, \theta^n$ *sur* U:

$$H = \text{Ann}\,(\theta^1, \ldots, \theta^n) \text{ sur } U.$$

Par définition, le sous-espace H_p est donc formé pour tout $p \in \mathscr{E}_U$ de vecteurs $A \in \mathbf{T}_pA$ tels que

$$\theta_p^i(A) = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que ce H soit un champ de sous-espaces horizontaux est l'indépendance linéaire des restrictions des covecteurs $\theta_p^1, \ldots, \theta_p^n$ au sous-espace vertical $\mathbf{T}_p\mathcal{F}_b$, $b = \pi(p)$, $p \in \mathscr{E}_U$ quelconque. Autrement dit, on exige qu'un vecteur vertical $A \in \mathbf{T}_p\mathcal{F}_b$ ne satisfasse à (13) que si $A = 0$.

Les formes $\theta^1, \ldots, \theta^n$ et $\bar\theta^1, \ldots, \bar\theta^n$ définissent de plus un même champ H sur U, i.e. elles vérifient en tout point $p \in \mathscr{E}_U$

$$\text{Ann}\,(\theta_p^1, \ldots, \theta_p^n) = \text{Ann}\,(\bar\theta_p^1, \ldots, \bar\theta_p^n)$$

si et seulement s'il y a équivalence linéaire entre $\theta_p^1, \ldots, \theta_p^n$ et $\bar\theta_p^1, \ldots, \bar\theta_p^n$, i.e. si l'on trouve des fonctions

$$c_i^j : p \mapsto c_i^j(p), \quad p \in \mathscr{E}_U,$$

où $i, j = 1, \ldots, n$, telles que

$$\bar\theta^i = c_j^i\theta^j \text{ sur } \mathscr{E}_U.$$

Soit maintenant $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un fibré vectoriel différentiable, et soit donné et fixé un atlas trivialisant $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ formé de trivialisations différentiables, tel que tous les voisinages trivialisants U_α soient des voisinages de coordonnées dans $\mathscr{B}$.

Compte tenu des résultats ci-dessus, les trivialisations $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{E}_{U_\alpha}$ et les applications de coordonnées $h_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^m$ définissent sur $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ les coordonnées locales (5), donc les champs de vecteurs et de covecteurs correspondants

$$\frac{\partial}{\partial a^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial a^n}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m},$$
$$da^1, \ldots, da^n, \quad dx^1, \ldots, dx^m.$$

Ce faisant, la formule (4) entraîne de suite pour chaque point $p \in \in \mathscr{E}_{U_\alpha}$

$$(d\pi_p)\left(\frac{\partial}{\partial a^i}\right)_p = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$
$$(d\pi_p)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_b, \quad k = 1, \ldots, m,$$

où $b = \pi(p)$. Par conséquent, les vecteurs $\left(\frac{\partial}{\partial a^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial a^n}\right)_p$ constituent une base du sous-espace vertical $\operatorname{Ker}(d\pi)_p = T_p\mathscr{F}_b$, si bien que les covecteurs $da^1_p, \ldots, da^n_p$ (ou, plus précisément, leurs restrictions à $T_p\mathscr{F}_b$) forment une base du dual $T^*_p\mathscr{F}_b$.

Si

$$\theta^i = f^i_j \, da^j + g^i_k \, dx^k \quad \text{sur } \mathscr{E}_{U_\alpha}, \tag{14}$$

avec $i, j = 1, \ldots, n$ et $k = 1, \ldots, m$, les restrictions des covecteurs θ^i_p à $T_p\mathscr{F}_b$ sont donc linéairement indépendantes pour tout point $p \in \mathscr{E}_{U_\alpha}$ si et seulement si la matrice $\| f^i_j \|$ est non dégénérée sur $\mathscr{E}_{U_\alpha}$.

Proposition 3. *Pour tout champ H de sous-espaces horizontaux, il existe sur le voisinage de coordonnées $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ des formes*

$$\overset{(\alpha)}{\theta^i} = da^i + e^i_k \, dx^k, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{15}$$

avec e^i_k des fonctions sur $\mathscr{E}_{U_\alpha}$, telles que

$$H = \operatorname{Ann}\left(\overset{(\alpha)}{\theta^1}, \ldots, \overset{(\alpha)}{\theta^n}\right) \text{ sur } U_\alpha.$$

Ces conditions caractérisent les formes (15) *de façon unique.*

D é m o n s t r a t i o n. *Existence.* Supposons que H est l'annulateur des formes (14) sur $\mathscr{E}_{U_\alpha}$, auquel cas la matrice $\| f^i_j \|$ d'éléments les fonctions f^i_j est (on le sait) non dégénérée en chaque point

$p \in \mathscr{E}_{U_\alpha}$. Soit $\| \hat{f}^i_j \|$ l'inverse de $\| f^i_j \|$. Les formes $\hat{f}^i_j \theta^j$ définissent le même champ H et s'écrivent sous forme (15).

Unicité. Il suffit de dire que $\theta^i = c^i_j \overset{(\alpha)}{\theta^j}$ ont la forme (15) si et seulement si $c^i_j = \delta^i_j$. □

Un champ H de sous-espaces horizontaux est évidemment différentiable si et seulement si les formes (15), i.e. les fonctions e^i_k, sont différentiables dans $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ quel que soit U_α.

* * *

On note l'importance particulière des champs différentiables H pour lesquels les coefficients e^i_k des formes (15) sont des fonctions linéaires de $a^1, \ldots, a^n$, i.e.

$$e^i_k = \overset{(\alpha)}{\Gamma}{}^i_{kj} a^j,$$

$\overset{\alpha}{\Gamma}{}^i_{kj}$ étant des fonctions différentiables de $x^1, \ldots, x^m$ (autrement dit, ce sont des fonctions différentiables sur le voisinage de coordonnées U_α).

Définition 3. Un champ différentiable

$$H : p \mapsto H_p, \quad p \in \mathscr{E},$$

de sous-espaces horizontaux est une *connexion* sur un fibré vectoriel différentiable ξ si, pour tout voisinage trivialisant U_α, les formes (15) définissant H s'écrivent

$$\overset{(\alpha)}{\theta^i} = da^i + \overset{(\alpha)}{\Gamma}{}^i_{kj} a^j \, dx^k, \quad i, j = 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, m,$$

avec $\overset{(\alpha)}{\Gamma}{}^i_{kj}$ des fonctions différentiables sur U_α.

Les fonctions $\overset{(\alpha)}{\Gamma}{}^i_{kj}$ sont les *coefficients de la connexion H* dans U_α. [L'ordre des indices inférieurs k et j n'est pas établi, et certains auteurs écrivent jk et non kj].

Il y a intérêt à introduire les formes différentielles linéaires

$$\overset{(\alpha)}{\omega}{}^i_j = \overset{(\alpha)}{\Gamma}{}^i_{kj} \, dx^k \quad \text{sur } U_\alpha$$

qui définissent univoquement la connexion H sur U_α (et que H définit de façon unique). On les appelle *formes de connexion H sur* U_α. On les écrit sous forme matricielle commode

$$\overset{(\alpha)}{\omega} = \| \overset{(\alpha)}{\omega}{}^i_j \|, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Si l'on considère naturellement $\overset{(\alpha)}{\omega}{}^i_j$ comme formes sur $\mathscr{E}_{U_\alpha}$, on a

$$\overset{(\alpha)}{\theta}{}^i = da^i + \overset{(\alpha)}{\omega}{}^i_j a^j \quad \text{sur } \mathscr{E}_{U_\alpha}. \tag{16}$$

On leur donne des fois le nom de *formes de connexion H sur* $\mathscr{E}_{U_\alpha}$.

[Ainsi, les formes $\overset{(\alpha)}{\omega}{}^i_j$ et $\overset{(\alpha)}{\theta}{}^i$ définissent les unes les autres. Les premières présentent l'avantage d'être définies sur les ouverts de la variété $\mathscr{B}$.]

Dans la suite, nous allégerons les formules en omettant (α), et nous écrirons ω^i_j tout court. Lorsqu'on aura à considérer U_α et U_β à la fois, on remplacera (β) par l'accent (ainsi, on écrira $\omega^{i'}_{j'}$ au lieu de $\overset{(\beta)}{\omega}{}^i_j$), ce qui concorde avec les notations ci-dessus (voir p.ex. les formules (4)) des coordonnées locales dans $\mathscr{E}_{U_\beta}$.

On désignera par $\varphi^{i'}_i(\mathrm{x}) = \varphi^{i'}_i(x^1, \ldots, x^n)$ (ou par $\varphi^{i'}_i$) les éléments de la matrice $\varphi_{\beta\alpha}(b)$, $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, considérés comme fonctions des coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n$ de la carte (U_α, h_α), et la notation $\varphi^i_{i'}(\mathrm{x}) = \varphi^i_{i'}(x^1, \ldots, x^n)$ (ou $\varphi^i_{i'}$) sera celle des éléments de la matrice inverse $\varphi_{\beta\alpha}(b)^{-1} = \varphi_{\alpha\beta}(b)$, $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, considérés comme fonctions des coordonnées locales $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ de (U_β, h_β).

Proposition 4. *Soient* Γ^i_{kj} n^2m *fonctions différentiables définies pour chaque* α *sur le voisinage* U_α. *Ces fonctions sont les coefficients d'une connexion H si et seulement si l'on a sur l'intersection* $U_\alpha \cap U_\beta$ *pour tout* α *et tout* β

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} = \varphi^{i'}_i \varphi^j_{j'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{kj} + \varphi^{i'}_i \frac{\partial \varphi^i_{j'}}{\partial x^{k'}}. \tag{17}$$

D é m o n s t r a t i o n. Sur $\mathscr{E}_{U_\alpha} \cap \mathscr{E}_{U_\beta}$, les coordonnées locales a^i, x^k et $a^{i'}$, $x^{k'}$ sont liées par les relations de la forme

$$a^i = \varphi^i_{i'}(\mathrm{x})\, a^{i'}, \quad i, i' = 1, \ldots, n,$$
$$x^k = x^k(\mathrm{x}'), \qquad k = 1, \ldots, m$$

(cf. formules (4); cette fois-ci, nous avons exprimé les coordonnées sur $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ par celles sur $\mathscr{E}_{U_\beta}$). Aussi,

$$da^i = \frac{\partial \varphi^i_{i'}}{\partial x^{k'}} a^{i'} dx^{k'} + \varphi^i_{i'} da^{i'}, \quad i, i' = 1, \ldots, n,$$
$$dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} dx^{k'}, \qquad k, k' = 1, \ldots, m.$$

Toute forme sur $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ telle que

$$\theta^i = da^i + \Gamma^i_{kj} a^j \, dx^k$$

est donc représentée sur $\mathscr{E}_{U_\alpha} \cap \mathscr{E}_{U_\beta}$ par les différentielles $da^{i'}$ et $dx^{k'}$ conformément à la formule

$$\theta^i = \varphi^i_{i'} \, da^{i'} + \left(\Gamma^i_{kj} \varphi^j_{j'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial \varphi^i_{j'}}{\partial x^{k'}} \right) a^{j'} \, dx^{k'}.$$

D'où

$$\varphi^{i'}_i \theta^i = da^{i'} + \varphi^{i'}_i \left(\varphi^j_{j'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{kj} + \frac{\partial \varphi^i_{j'}}{\partial x^{k'}} \right) a^{j'} \, dx^{k'}. \tag{18}$$

Les fonctions Γ^i_{kj} définissent univoquement sur $\mathscr{E}_{U_\alpha}$ les formes θ^i, donc une connexion H_α. Les fonctions $\Gamma^{i'}_{k'j'}$ définissent de même sur $\mathscr{E}_{U_\beta}$ une connexion H_β, et les connexions H_α donnent par recollement une connexion H définie sur $\mathscr{E}$ tout entier si et seulement si l'on a pour tout α et tout β

$$H_\alpha = H_\beta \quad \text{sur } U_\alpha \cap U_\beta. \tag{19}$$

Comme les formes (18) et θ^i définissent sur $U_\alpha \cap U_\beta$ la même connexion H_α, l'égalité (19) est remplie si et seulement si (18) coïncident sur $U_\alpha \cap U_\beta$ avec

$$\theta^{i'} = da^{i'} + \Gamma^{i'}_{k'j'} a^{j'} \, dx^{k'},$$

formes qui donnent H_β. La proposition 4 est évidemment démontrée. □

Puisque $\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} dx^{k'} = dx^k$ et $\frac{\partial \varphi^i_{j'}}{\partial x^{k'}} dx^{k'} = d\varphi^i_{j'}$, on simplifie la formule (17):

$$\omega^{i'}_{j'} = \varphi^{i'}_i \varphi^j_{j'} \omega^i_j + \varphi^{i'}_i \, d\varphi^i_{j'}. \tag{17'}$$

En notation matricielle,

$$\omega' = \varphi^{-1} \omega \varphi + \varphi^{-1} d\varphi, \tag{17''}$$

i.e. on a (avec les notations primitives)

$$\overset{(\beta)}{\omega} = \varphi^{-1}_{\beta\alpha} \overset{(\alpha)}{\omega} \varphi_{\beta\alpha} + \varphi^{-1}_{\beta\alpha} \, d\varphi_{\beta\alpha}. \tag{17'''}$$

Ce sont justement les relations (17″) ou (17‴) qu'on a à retenir.

* * *

Soit $\varphi \colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ un morphisme différentiable d'un K-fibré vectoriel $\xi' = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{B}')$ dans un K-fibré vectoriel $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$. On a pour tout point $b' \in \mathscr{B}'$ le diagramme commutatif des

applications différentiables

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_{b'} & \to & \mathcal{E}' & \to & \mathcal{B}' \\ \varphi_{b'}\downarrow & & \varphi\downarrow & & f\downarrow \\ \mathcal{F}_b & \to & \mathcal{E} & \to & \mathcal{B}, \end{array} \quad b = f(b'),$$

avec $f = \hat{\varphi}$ l'application $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ induite par φ. Par conséquent, on a pour tout point $p' \in \mathcal{F}_{b'}$ le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{T}_{p'}\mathcal{F}_{b'} & \to & \mathrm{T}_{p'}\mathcal{E}' & \to & \mathrm{T}_{b'}\mathcal{B}' & \to & 0 \\ & & (\mathrm{d}\varphi_{b'})_{p'}\downarrow & & (\mathrm{d}\varphi)_p\downarrow & & (\mathrm{d}f)_b\downarrow & & \\ 0 & \to & \mathrm{T}_p\mathcal{F}_b & \to & \mathrm{T}_p\mathcal{E} & \to & \mathrm{T}_b\mathcal{B} & \to & 0, \end{array} \quad p = \varphi(p'),$$

d'espaces vectoriels et d'applications linéaires entre ces espaces. Les deux lignes constituent des suites exactes (on a à gauche des monomorphismes, à droite des épimorphismes, et l'image de chaque application à gauche coïncide avec le noyau de l'application à droite).

Soit H une connexion donnée sur ξ.

Problème 6. Démontrer que

1° *Pour tout point* $p' \in \mathcal{E}'$, *l'espace* $\mathrm{T}_{p'}\mathcal{E}'$ *contient un sous-espace* $H'_{p'}$ *et un seul tel que*

$$\mathrm{T}_{p'}\mathcal{E}' = \mathrm{T}_{p'}\mathcal{F}_{b'} \oplus H'_{p'},$$

et que $(\mathrm{d}\varphi)_{p'}$ *applique isomorphiquement sur le sous-espace* $H_p \subset \mathrm{T}_p\mathcal{E}$.

2° *Les sous-espaces* $H'_{p'}$ *forment sur* $\mathcal{E}'$ *une connexion* H'.

3° *Quel que soit le voisinage trivialisant* $U \subset \mathcal{B}$, *les formes de connexion* H' *sur* $f^{-1}U \subset \mathcal{B}'$ *sont les formes* $f^*\omega_j^i$, ω_j^i *étant les formes de connexion* H *sur* U.

La connexion H' sur le fibré ξ' s'appelle *image réciproque* de H par le morphisme $\varphi: \xi' \to \xi$, ce qui se note φ^*H. Si $\xi' = f^*\xi$ et $\varphi = f^!$, la connexion φ^*H est désignée par f^*H, et on dit que c'est l'*image réciproque de* H *par l'application* $f: \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$.

Problème 7. Démontrer que pour n'importe quelles applications différentiables $g: \mathcal{B}'' \to \mathcal{B}$ et $f: \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$, la connexion $(f \circ g)^* H$ sur le fibré $(f \circ g)^* \xi = g^* (f^* \xi)$ (voir problème 2) coïncide avec la connexion $g^* (f^*H)$.

* * *

La notion d'image réciproque d'une connexion s'avère utile lorsqu'on a à caractériser, par exemple, les connexions sur $\xi_{\mathbb{R}}$ (décomplexifié d'un fibré vectoriel complexe ξ) qui s'obtiennent à partir de celles sur ξ.

Soit ξ un fibré vectoriel complexe, et soit $\xi_{\mathbb{R}}$ son décomplexifié. (On note que ξ est, par définition, différentiable si et seulement s'il en est ainsi pour $\xi_{\mathbb{R}}$.)

Il est clair que toute connexion H sur ξ l'est sur ξ_{R}. Le problème consiste donc à caractériser les connexions sur ξ_{R} qui sont dans ce sens des connexions sur ξ.

Soit, sur ξ_{R}, l'opérateur structure complexe

$$I: \xi_{\mathrm{R}} \to \xi_{\mathrm{R}}$$

(voir leçon 6). Comme il est un automorphisme de ξ_{R} sur $\mathscr{B}$, on définit pour toute H sur ξ_{R} une connexion I^*H (une autre connexion sur ξ_{R}). D'autre part, l'opérateur I est manifestement une application différentiable, si bien qu'on définit pour tout point $p \in \mathscr{E}$ sa différentielle

$$(\mathrm{d}I)_p : \mathbf{T}_p\mathscr{E} \to \mathbf{T}_p\mathscr{E}$$

qui, sur le sous-espace vertical

$$\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b^{\xi_{\mathrm{R}}} = (\mathbf{T}_p\mathscr{F}_b)_{\mathrm{R}} = (\mathscr{F}_b)_{\mathrm{R}}, \quad b = \pi(p), \quad \mathscr{F}_b = \mathscr{F}_b^{\xi},$$

est l'opérateur $I_b : (\mathscr{F}_b)_{\mathrm{R}} \to (\mathscr{F}_b)_{\mathrm{R}}$ structure complexe sur $(\mathscr{F}_b)_{\mathrm{R}}$.

Problème 8. Démontrer que *les conditions suivantes sont équivalentes pour une connexion H sur* ξ_{R} :

1° *H est une connexion sur ξ.*

2° *On a l'égalité*

$$I^*H = H.$$

3° *Pour tout point $p \in \mathscr{E}$,*

$$H_p = (\mathrm{d}I)_p H_p.$$

Problème 9. Soient ω la matrice des formes de connexion H sur le fibré ξ (sur un voisinage trivialisant $U \subset \mathscr{B}$), et ω_{R} la matrice des formes de connexion H sur ξ_{R}. Exprimer les formes ω_{R} et ω l'une en fonction de l'autre. [*Indication.* ω est une matrice carrée d'ordre n à éléments les formes différentielles linéaires à coefficients complexes, et ω_{R} est une matrice carrée d'ordre $2n$ à éléments les formes à coefficients réels.]

* * *

Nous aurons besoin plus loin (leçon 22) du cas particulier de construction d'une image réciproque que voici.

Soit donnée pour tout $s \in \mathbb{R}$ une connexion H_s sur le fibré ξ. Les coefficients Γ^i_{kj} de H_s sont, sur chaque voisinage de coordonnées trivialisant $U \subset \mathscr{B}$, des fonctions de s et des coordonnées locales $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^m)$, i.e. des fonctions du point $(s, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+1}$. Si, pour tout voisinage U, Γ^i_{kj} sont des fonctions différentiables de $(s, \mathbf{x})$, la famille $\{H_s, s \in \mathbb{R}\}$ de connexions H_s est dite *différentiable.*

Problème 10. Soit $\xi \times I = \{\mathscr{E} \times I, \pi \times \mathrm{id}, \mathscr{B} \times I\}$. Montrer que

1° *Le fibré* $\xi \times I$ *est un fibré vectoriel de rang n isomorphe au fibré* $(\mathrm{pr})^*\xi$, pr *étant la projection*

$$\mathscr{B} \times I \to \mathscr{B}, \quad (b, s) \mapsto b.$$

2° *Toute famille différentiable* $\{H_s\}$ *de connexions sur* ξ *définit canoniquement une connexion (notée toujours* $\{H_s\}$*) sur* $\xi \times I$.

3° *On a pour tout* $s_0 \in I$

$$i_{s_0}^* (\xi \times I) = \xi \quad et \quad i_{s_0}^* \{H_s\} = H_{s_0},$$

avec $i_{s_0}\colon \mathscr{B} \to \mathscr{B} \times I$ *l'injection* $b \mapsto (b, s_0)$.

Quelle que soit la connexion H sur ξ, pr^*H est une connexion $\{H_s\}$, où $H_s = H$ pour tous les $s \in \mathbb{R}$.

On note que les connexions $\{H_s\}$ ne sont pas les seules connexions sur $\xi \times I$.

Problème 11. Montrer que la connexion $\mathrm{Ann}(\theta^1, \ldots, \theta^n)$ sur $\xi \times I$ s'écrit $\{H_s\}$ si et seulement si les formes $\theta^1, \ldots, \theta^n$ ne dépendent pas de ds.

Soient $\{H_s^I\}$ une famille différentiable de connexions sur le fibré $\xi \times I$, et Δ l'application $\mathscr{B} \times I \to \mathscr{B} \times I \times I$ définie par la formule

$$\Delta (b, t) = (b, t, t), \quad b \in \mathscr{B}, \quad t \in I.$$

Si l'on considère $\{H_s^I\}$ comme connexion sur $\xi \times I \times I$, on construit la connexion $\Delta^* \{H_s^I\}$ sur $\xi \times I$. On la note $\{H_s^I\}_{s=t}$ et on l'appelle *diagonalisation* de $\{H_s^I\}$.

Problème 12. Démontrer que pour tout $t \in I$

$$i_t^* \{H_s^I\}_{s=t} = i_t^* H_t^I. \tag{18}$$

[*Indication.* Cf. affirmation 3° du problème 10.]

Courbes horizontales. — Dérivées covariantes des sections. — Dérivation covariante le long d'une courbe. — Connexions en tant que dérivations covariantes. — Applications linéaires des modules des sections. — Connexions sur les fibrés munis d'une métrique.

Soit $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un fibré vectoriel différentiable à connexion H.

Définition 1. Une courbe différentiable $v: I \to \mathscr{E}$ sur une variété $\mathscr{E}$, où I est un segment de l'axe $\mathbb{R}$ (on suppose par exemple, pour fixer les idées, que $I = I$), est *horizontale* si son vecteur tangent $\dot{v}(t)$ appartient pour tout $t \in I$ au sous-espace $H_{v(t)}$. [Le point au-dessus des lettres symbolise ici (et dans la suite) une dérivation par rapport à t.]

En coordonnées locales

(1) $$a^1, \ldots, a^n, x^1, \ldots, x^m$$

de la carte $(\mathscr{E}_{U_\alpha}, g_\alpha)$ (voir leçon 10), chaque courbe v est définie (à condition que $v(t) \in \mathscr{E}_{U_\alpha}$ pour tout $t \in I$) par les équations paramétriques de la forme

(2) $$a^i = a^i(t), \quad x^k = x^k(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

avec $a^i(t)$ et $x^k(t)$ des fonctions différentiables sur I. Son vecteur tangent $\dot{v}(t)$ a pour composantes

$$\dot{a}^1(t), \ldots, \dot{a}^n(t), \dot{x}^1(t), \ldots, \dot{x}^m(t),$$

et la condition $\dot{v}(t) \in H_{v(t)}$ (i.e. on a $\theta^i_{v(t)}(\dot{v}(t)) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, avec $\theta^1, \ldots, \theta^n$ les formes de connexion H sur $\mathscr{E}_{U_\alpha}$) qui rend v horizontale, s'écrit

(3) $$\dot{a}^i(t) + \Gamma^i_{kj}(\mathrm{x}(t))\, \dot{x}^k(t)\, a^j(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

où $\mathrm{x}(t) = (x^1(t), \ldots, x^m(t))$.

Ainsi, *une courbe v définie paramétriquement par* (2) *est horizontale si et seulement si les relations* (3) *sont des identités par rapport à t.*

Conformément à la définition générale 3 de la leçon 4, la courbe $u = \pi \circ v$ sur la variété $\mathscr{B}$ est la *projection* de v, et la courbe v sur la variété $\mathscr{E}$ est un *relèvement* de u. Il y a des fois avantage à assimiler v à un champ de vecteurs sur u qui associe à chaque point $u(t)$ de

u le vecteur $v(t)$ de l'espace vectoriel $\mathcal{F}_{v(t)}$, i.e. à considérer en bref la courbe v comme *champ de* ξ*-vecteurs* sur u. Une courbe horizontale v regardée comme champ sur u s'appelle *champ de vecteurs parallèles sur* u (relativement à la connexion H).

En coordonnées locales $x^1, \ldots, x^m$ sur U_α, les équations paramétriques de u s'écrivent

$$x^k = x^k(t),\ 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{4}$$

si bien que le passage analytique à la courbe u consiste à supprimer les n premières équations (2), et, inversement, le passage au relèvement v exige qu'on adjoigne à m équations (4) n équations supplémentaires

$$a^i = a^i(t),\ 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{5}$$

où $a^i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des fonctions différentiables (quelconques en général) sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si la courbe v est considérée comme champ de ξ-vecteurs sur u, les fonctions $a^i(t)$ sont les *composantes* de celui-ci (dans le système donné de coordonnées locales).

Si l'on adopte ce point de vue, les relations (3) constituent, pour la courbe donnée u définie par (4), un système d'équations différentielles linéaires (à coefficients $\Gamma^i_{kj}(x(t))\dot{x}^k(t)$ variables en général) pour les fonctions (5). Si l'on détermine pour un point $t_0 \in I$ le point $p_0 \in \mathscr{E}$ qui se projette en $b_0 = u(t_0)$, i.e. qui appartient à la fibre $\mathcal{F}_{b_0}$ du fibré ξ, et si l'on suppose que $u(t) \in U_\alpha$ pour tout $t \in I$, on obtient donc (par suite du théorème d'existence et d'unicité pour les équations différentielles linéaires) une seule courbe horizontale $v: I \to \mathscr{E}$ qui se projette en u, telle que $v(t_0) = p_0$ (et $v(t) \in \in \mathscr{E}_{U_\alpha}$ pour tout $t \in I$).

Mais si la condition « $u(t) \in U_\alpha$ pour tout $t \in I$ » n'est pas remplie, on partage I en des segments en nombre fini sur chacun desquels elle a lieu (pour un α propre), si bien qu'il existe un relèvement horizontal. Toutes ces courbes forment une courbe (évidemment différentiable) v, relèvement de u (tel que $v(t_0) = p_0$). Sous l'hypothèse de $\mathscr{E}$ une variété séparée, il y a unicité qu'on établit facilement. (Cf. leçon III.17, théorème d'unicité des courbes intégrales maximales d'un champ de vecteurs.)

Comme la variété $\mathscr{E}$ est séparée si et seulement si $\mathscr{B}$ l'est, on a la

Proposition 1. *Soit* $\mathscr{B}$ *une variété séparée. Pour toute courbe différentiable* $u: I \to \mathscr{B}$, *tout point* $t_0 \in I$ *et tout point* $p_0 \in \mathcal{F}_{b_0}$, $b_0 = u(t_0)$, *il existe une seule courbe horizontale* $v: I \to \mathscr{E}$, *relèvement de la courbe* u, *telle que* $v(t_0) = p_0$. □

Lorsque $I = I$ et $t_0 = 0$, cela fournit une application

$$\mathrm{Cocyl}_{\mathrm{diff}}\pi \to \mathscr{P}_{\mathrm{diff}}(\mathscr{E})$$

du sous-espace $\mathrm{Cocyl}_{\mathrm{diff}}\pi \subset \mathrm{Cocyl}\,\pi$, formé des couples (p_0, u), $\pi(p_0) = u(0)$, pour lesquels le chemin u est différentiable, dans l'espace $\mathcal{P}_{\mathrm{diff}}(\mathscr{E})$ des chemins différentiables sur $\mathscr{E}$, qui est une section de l'application

$$\mathcal{P}_{\mathrm{diff}}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Cocyl}_{\mathrm{diff}}\pi, \quad v \mapsto (v(0), \pi \circ v),$$

i.e. un analogue « différentiable » de la connexion au sens de Hurewicz (voir leçon 2). On comprend désormais pourquoi H est appelé « connexion ».

* * *

Les propriétés géométriques des relèvements horizontaux seront examinées de nouveau dans la leçon 18, et on se propose pour l'instant d'utiliser ces courbes dans la définition invariante des connexions, qui ne s'appuie pas sur la notion d'un voisinage de coordonnées trivialisant.

Une section

$$s: \mathscr{B} \to \mathscr{E}$$

d'un fibré vectoriel différentiable $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ (ou un champ de ξ-vecteurs sur $\mathscr{B}$ si l'on emploie un vocabulaire différent) est *différentiable* si elle constitue une application différentiable de la variété $\mathscr{B}$ dans la variété $\mathscr{E}$. Le symbole $\Gamma\xi$ désigne, à la différence de la leçon 6, l'ensemble de sections différentiables seules. $\Gamma\xi$ est un espace vectoriel sur K et un module sur l'algèbre $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$ des fonctions différentiables sur $\mathscr{B}$ à valeurs dans K.

Problème 1. Démontrer que la trivialisation $\varphi: U \times \mathsf{K}^n \to \mathscr{E}_U$ d'un fibré ξ sur un ensemble ouvert $U \subset \mathscr{B}$ est différentiable si et seulement si la base associée $s_1, \ldots, s_n$ du module de toutes les sections continues au-dessus de U est formée de sections différentiables.

Remarque 1. Comme $\pi \circ s = \mathrm{id}$, l'application s et sa différentielle $(ds)_b$ en tout point $b \in \mathscr{B}$ sont des injections. Ainsi, *quelle que soit la section différentiable* $s: \mathscr{B} \to \mathscr{E}$, *l'ensemble* $s(\mathscr{B})$ *est une sous-variété de* $\mathscr{E}$. Les sous-variétés de la forme $s(\mathscr{B})$ sont caractérisées (on le constate facilement) par la propriété d'être difféomorphiquement appliquées par la projection π sur $\mathscr{B}$ (on les appelle *surfaces de section* du fibré ξ). Quand on ne se soucie pas de la rigueur des raisonnements, on identifie les sections et les surfaces de section.

S'agissant du fibré tangent $\tau_{\mathscr{B}} = (\mathrm{T}\mathscr{B}, \pi, \mathscr{B})$, les sections ne sont autres que les champs de vecteurs sur $\mathscr{B}$ dont le module $\Gamma\tau_{\mathscr{B}}$ se note $\mathfrak{a}\mathscr{B}$ (voir III.16).

On rappelle (voir III.17) qu'une courbe $u: I \to \mathscr{B}$ est une *courbe intégrale* d'un champ vectoriel $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ si

$$\dot{u}(t) = X_{u(t)} \text{ pour tout } t \in I.$$

Aux termes du théorème 1 de la leçon III.17, on trouve pour tout point $b \in \mathscr{B}$ et tout champ X une courbe intégrale $u: I \to \mathscr{B}$ de X, définie sur un intervalle I de l'axe $\mathbb{R}$ contenant le point 0 et telle que $u(0) = b$. Si la variété X est séparée, deux courbes quelconques ainsi définies coïncident sur la partie commune de leurs domaines de définition.

Soient $s: \mathscr{B} \to \mathscr{E}$ une section différentiable arbitraire du fibré ξ, et $v: I \to \mathscr{E}$ un relèvement horizontal de la courbe intégrale u du champ X, qui vérifie la relation

$$v(0) = s(b).$$

On définit pour tout $t \in I$ dans la fibre $\mathscr{F}_{u(t)}$ de ξ deux vecteurs $s(u(t))$ et $v(t)$ et, partant, le vecteur

$$\frac{s(u(t)) - v(t)}{t} \quad \text{pour } t \neq 0. \tag{6}$$

Les vecteurs (6) appartiennent en général, pour t différents, aux espaces vectoriels $\mathscr{F}_{u(t)}$ différents. Mais il est toutefois loisible de parler de leur limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{s(u(t)) - v(t)}{t}. \tag{7}$$

Elle appartient à la fibre $\mathscr{F}_{u(0)} = \mathscr{F}_b$ et est désignée par $(\nabla_X s)(b)$.

Le point b de $\mathscr{B}$ est absolument quelconque, et nous avons l'application

$$\nabla_X s: b \mapsto (\nabla_X s)(b)$$

de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{E}$, qui est une section de ξ par construction.

Définition 2. La section $\nabla_X s$ s'appelle *dérivée covariante de la section s suivant le champ X* (pour la connexion H donnée).

La première question que l'on se pose à propos de la section $\nabla_X s$ est de savoir si oui ou non elle est différentiable. On verra que la réponse est affirmative (plus précisément, la classe de différentiabilité de $\nabla_X s$ est d'une unité inférieure à celle de s) si l'on calcule $\nabla_X s$ en coordonnées sous forme explicite.

Soit U un voisinage de coordonnées trivialisant quelconque de $b \in \mathscr{B}$. La trivialisation $\varphi: U \times \mathbb{K}^n \to \mathscr{E}_U$ du fibré ξ au-dessus de U détermine (voir leçon 6) la base

$$s_1, \ldots, s_n \tag{8}$$

du $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}U$-module $\Gamma(\xi \mid_U)$ (telle que $s_i(b) = \varphi(b, \mathbf{e}_i)$, $i = 1, \ldots, n$), et le difféomorphisme de coordonnées $h: U \to \mathbb{K}^m$ définit la base

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}, \quad m = \dim \mathscr{B}, \tag{9}$$

du $\mathsf{F}_{\mathbf{R}}U$-module $\mathfrak{a}U$. Soient s^i, $i = 1, \ldots, n$, les coordonnées de la section s (plus précisément, de sa restriction $s\,|_U$) dans la base (8), et soient X^k, $k = 1, \ldots, m$, les coordonnées du champ X (i.e. les coordonnées de sa restriction $X\,|_U$) dans la base (9) :

$$s = s^i s_i, \quad X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

On suppose ensuite que $x^k = x^k(t)$, $k = 1, \ldots, m$, sont les équations paramétriques de la courbe intégrale $u\colon I \to \mathscr{B}$, et que

$$a^i = a^i(t),\ x^k = x^k(t),\ i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m,$$

sont celles de son relèvement horizontal $v\colon I \to \mathscr{E}$. (On peut certes faire l'hypothèse de $u(t) \in U$ pour tout t sans nuire à la généralité de l'exposé.) On note que les nombres $a^i(t)$ sont exprimés par la formule

$$a^i(t) = s^i(\mathrm{x}(t))$$

(où $\mathrm{x}(t) = (x^1(t), \ldots, x^m(t))$ comme toujours) et qu'ils vérifient l'égalité $v(t) = a^i(t)\, s_i(u(t))$, i.e. ce sont les coordonnées du vecteur $v(t) \in \mathscr{F}_{u(t)}$ dans la base $s_1(u(t)), \ldots, s_n(u(t))$ de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_{u(t)}$. Par définition,

$$\dot{x}^k(t) = X^k(\mathrm{x}(t))$$

pour tout $k = 1, \ldots, m$, et

$$\dot{a}^i(t) + \Gamma^i_{kj}(\mathrm{x}(t))\, a^j(t)\, \dot{x}^k(t) = 0,$$

i.e.

$$\dot{a}^i(t) + \Gamma^i_{kj}(\mathrm{x}(t))\, a^j(t)\, X^k(\mathrm{x}(t)) = 0$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$. Ce faisant, le vecteur (6) de $\mathscr{F}_{u(t)}$ est défini dans la base $s_1(u(t)), \ldots, s_n(u(t))$ par les coordonnées

$$\frac{s_i(\mathrm{x}(t)) - a^i(t)}{t} = \frac{s^i(\mathrm{x}(t)) - a^i_0}{t} - \frac{a^i(t) - a^i_0}{t},$$

avec $a^i_0 = a^i(0) = s^i(\mathrm{x}(0))$ les coordonnées du point $s(b)$ de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_b$. Aussi, la limite (7) s'écrit en coordonnées

$$\lim_{t\to 0} \frac{s^i(\mathrm{x}(t)) - s^i(\mathrm{x}(0))}{t} - \lim_{t\to 0} \frac{a^i(t) - a^i_0}{t} =$$

$$= \frac{\partial s^i}{\partial x^k}(\mathrm{x}(0))\, \dot{x}^k(0) - \dot{a}^i(0) =$$

$$= \left[\frac{\partial x^i}{\partial x^k} X^k + \Gamma^i_{kj} s^j X^k\right](\mathrm{x}(0)).$$

Comme x (0) est le vecteur des coordonnées de b, on peut dire que *la section $\nabla_X s$ au-dessus de U est définie dans la base* (8) *par les coordonnées*

$$(10) \qquad (\nabla_X s)^i = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} s^j \right) X^k,$$

i.e.

$$(11) \qquad \nabla_X s = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} s^j \right) X^k s_i \text{ au-dessus de } U.$$

On voit en particulier que *la section $\nabla_X s$ est différentiable si s l'est.*

L'opérateur $\nabla_X : \Gamma(\xi \mid _U) \to \Gamma(\xi \mid _U)$ est manifestement déterminé pour tout champ de vecteurs X sur U (par exemple, pour $X = \frac{\partial}{\partial x^k}$, $k = 1, \ldots, n$).

Dans ce cas, l'opérateur ∇_X est désigné par le symbole ∇_k, et la section $\nabla_k s$ s'appelle *dérivée covariante partielle* de la section $s \in \Gamma(\xi \mid_U)$ *par rapport à* x_k. On a

$$\nabla_X s = X^k \nabla_k s$$

pour tout champ X.

Selon la formule (10), les coordonnées $(\nabla_k s)^i$ de $\nabla_k s$ dans la base $s_1, \ldots, s_n$ s'expriment moyennant les coordonnées s^i de s par

$$(12) \qquad (\nabla_k s)^i = \frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} s^j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

En particulier,

$$(13) \qquad (\nabla_k s_j)^i = \Gamma^i_{kj}, \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant n; \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

donc

$$(13') \qquad (\nabla_X s_j)^i = \omega^i_j(X), \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant n.$$

Remarque 2. On peut définir la section $\nabla_X s$ en s'appuyant sur la formule (10) ou (11), ou sur les deux à la fois. Ce faisant, il faut vérifier que les sections construites sont compatibles sur les intersections, i.e. que les sections (11) au-dessus des voisinages U et U' coïncident sur $U \cap U'$. On procède comme suit.

Les êtres relatifs à U' auront leurs indices munis d'accent (ainsi, $s_{1'}, \ldots, s_{n'}$ est la base (8) du module $\Gamma(\xi \mid_{U'})$, et $x^{1'}, \ldots, x^{m'}$ sont les coordonnées locales dans U'). Dans ce cas, la section $\nabla_X s$ au-dessus du voisinage U' est donnée par la formule

$$\nabla_X s = \left(\frac{\partial s^{i'}}{\partial x^{k'}} + \Gamma^{i'}_{j'k'} s^{j'} \right) X^{k'} s_{i'} \text{ au-dessus de } U',$$

et on a à démontrer qu'elle coïncide avec (11) sur $U \cap U'$.

Or, on a par définition sur cette intersection

$$s_{i'} = \varphi^{i}_{i'} s_i \quad \text{et} \quad s^{i'} = \varphi^{i'}_{i} s^{i}, \quad i,\ i' = 1, \ldots, n,$$

avec $\varphi^{i}_{i'}$ et $\varphi^{i'}_{i}$ les composantes des fonctions de transition matricielles $U \cap U' \to \mathrm{GL}\,(n;\, \mathrm{K})$ réciproques l'une de l'autre (de U à U' et de U' à U), et les égalités

$$X^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}} X^{k}$$

et

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \varphi^{i'}_{i} \varphi^{j}_{j'} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}} \Gamma^{i}_{jk} + \varphi^{i'}_{i} \frac{\partial \varphi^{i}_{j'}}{\partial x^{k'}},$$

$$k,\ k' = 1, \ldots, m; \quad i,\ i',\ j,\ j' = 1, \ldots, n.$$

Aussi, on a sur $U \cap U'$

$$\begin{aligned}
\nabla_X s|_{U'} &= \left[\frac{\partial s^{i'}}{\partial x^{k'}} + \left(\varphi^{i'}_{i} \varphi^{p}_{j'} \frac{\partial x^{q}}{\partial x^{k'}} \Gamma^{i}_{pq} + \varphi^{i'}_{i} \frac{\partial \varphi^{i}_{j'}}{\partial x^{k'}}\right) \varphi^{j'}_{j} s^{j}\right] \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k}} X^{k} s_{i'} = \\
&= \left[\frac{\partial (\varphi^{i'}_{i} s^{i})}{\partial x^{k}} + \left(\varphi^{i'}_{i} \varphi^{p}_{j'} \Gamma^{i}_{pk} + \varphi^{i'}_{i} \frac{\partial \varphi^{i}_{j'}}{\partial x^{k}}\right) \varphi^{j'}_{j} s^{j}\right] X^{k} \varphi^{l}_{i'} s_{l} = \\
&= \left[\frac{\partial \varphi^{i'}_{i}}{\partial x^{k}} s^{i} \varphi^{l}_{i'} + \varphi^{i'}_{i} \varphi^{l}_{i'} \frac{\partial s^{i}}{\partial x^{k}} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\varphi^{i'}_{i} \varphi^{l}_{i'} \varphi^{p}_{j'} \varphi^{j'}_{j} \Gamma^{i}_{pk} + \varphi^{i'}_{i} \varphi^{j'}_{j} \varphi^{l}_{i'} \frac{\partial \varphi^{i}_{j'}}{\partial x^{k}}\right) s^{j}\right] X^{k} s_{l} = \\
&= \left[\left(\frac{\partial \varphi^{i'}_{j}}{\partial x^{k}} \varphi^{l}_{i'} + \varphi^{j'}_{j} \frac{\partial \varphi^{l}_{j'}}{\partial x^{k}}\right) s^{j} + \left(\frac{\partial s^{l}}{\partial x^{k}} + \Gamma^{l}_{jk} s^{j}\right)\right] X^{k} s_{l} = \\
&= \left[\frac{\partial (\varphi^{i'}_{j} \varphi^{l}_{i'})}{\partial x^{k}} + \left(\frac{\partial s^{l}}{\partial x^{k}} + \Gamma^{l}_{jk} s^{j}\right)\right] X^{k} s_{l} = \\
&\qquad = \left(\frac{\partial s^{l}}{\partial x^{k}} + \Gamma^{l}_{jk} s^{j}\right) X^{k} s_{l} = \nabla_X s|_{U}
\end{aligned}$$

puisque $\varphi^{i'}_{i} \varphi^{l}_{i'} = \delta^{l}_{i}$ $\left(\text{si bien qu'on a en particulier } \dfrac{\partial (\varphi^{i'}_{j} \varphi^{l}_{i'})}{\partial x^{k}} = 0\right)$. □

* * *

Il y a intérêt à étudier la dérivation covariante pour les champs de ξ-vecteurs sur les courbes.

Soit $u: I \to \mathscr{B}$ une courbe de $\mathscr{B}$ définie en coordonnées locales par $x^{k} = x^{k}(t)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, et soit $v: I \to \mathscr{E}$ un champ de ξ-vec-

teurs quelconque de composantes $a^i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sur u. On définit un autre champ de ξ-vecteurs sur u qu'on appelle *dérivée covariante de v le long de u* et qu'on symbolise par $\frac{\nabla v}{dt}$. Ses composantes sont par définition

$$(14) \qquad \left(\frac{\nabla v}{dt}\right)^i = \dot{a}^i(t) + \Gamma^i_{kj}(x(t))\,\dot{x}^k(t)\,a^j(t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Problème 2. Supposer que le champ de ξ-vecteurs v est la restriction à u d'une section, i.e. qu'il existe une section $s\colon \mathscr{B} \to \mathscr{E}$ du fibré ξ, telle que $v(t) = s(u(t))$ pour tout $t \in I$. Faire de plus l'hypothèse que le champ $t \mapsto \dot{u}(t)$ de vecteurs tangents sur u est lui aussi la restriction d'un champ à $\mathscr{B}$, i.e. qu'on trouve un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ tel que $X_{u(t)} = \dot{u}(t)$ pour tout $t \in I$ (la courbe u est une courbe intégrale du champ X). Montrer que le champ $\frac{\nabla v}{dt}$ est la restriction à u de la section $\nabla_X s$.

[On note que la section s et le champ X existent de toute évidence localement, i.e. dans le voisinage d'un point $u(t_0)$ quelconque tel que $\dot{u}(t_0) \neq 0$.]

Soit $\mathring{I}$ l'intérieur du segment I. $\mathring{I}$ est une variété différentiable (et $u\colon \mathring{I} \to \mathscr{B}$ une application différentiable), si bien qu'on définit au-dessus de $\mathring{I}$ un fibré différentiable $u^*\xi$ à connexion u^*H.

Problème 3. Montrer que

1° *Chaque champ de ξ-vecteurs $v\colon I \to \mathscr{E}$ sur la courbe u s'identifie naturellement à une section du fibré $u^*\xi$ au-dessus de $\mathring{I}$.*

2° *La dérivée covariante de cette section suivant le champ vectoriel $\frac{d}{dt}$ sur $\mathring{I}$ pour la connexion induite u^*H n'est autre que la restriction à I de la dérivée covariante $\frac{\nabla v}{dt}$ du champ v le long de u.*

Si l'on compare (14) et (3), on constate de suite que *l'égalité $\frac{\nabla v}{dt} = 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que v soit un champ de ξ-vecteurs parallèles* (*une courbe horizontale* si l'on emploie un autre vocabulaire).

Ainsi, *les vecteurs parallèles le long d'une courbe sont exactement les vecteurs constants d'une façon covariante.*

* * *

L'opération de dérivation covariante ∇_X est l'application

$$\nabla_X\colon \Gamma\xi \to \Gamma\xi$$

du module $\Gamma\xi$ dans lui-même.

Proposition 2. *L'opération* ∇_X *présente trois propriétés suivantes:*
a) *elle est linéaire sur le corps* K, *i.e.*

$$\begin{aligned} \nabla_X (s+t) &= \nabla_X s + \nabla_X t, \\ \nabla_X (\lambda s) &= \lambda \nabla_X s \end{aligned}$$

quels que soient les sections s, $t \in \Gamma\xi$ *et le nombre* $\lambda \in \mathsf{K}$;
b) *on a pour toute fonction* $f \in \mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$ *et toute section* $s \in \Gamma\xi$

$$\nabla_X (fs) = Xf\cdot s + f\nabla_X s \tag{15}$$

(où X *du second membre est pour* $\mathsf{K} = \mathbf{C}$ *l'extension complexe de l'opérateur* X *sur* $\mathsf{F}\mathscr{B} = \mathsf{F}_{\mathsf{R}}\mathscr{B}$*)*;
c) ∇_X *est une fonction* $\mathsf{F}\mathscr{B}$*-linéaire de* X, *i.e.*

$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$$

quels que soient les champs X, $Y \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ *et les fonctions* f, $g \in \mathsf{F}\mathscr{B}$.

D é m o n s t r a t i o n. Les propriétés a) et c) découlent directement de (10) et (11) ou de l'une de ces formules (dont les seconds membres sont des fonctions K-linéaires de s et des fonctions $\mathsf{F}\mathscr{B}$-linéaires de X). On vérifie b) par le calcul simple:

$$[\nabla_X (fs)]^i = \left[\frac{\partial (fs^i)}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj}\cdot fs^j\right] X^k = \left[\frac{\partial f}{\partial x^k}\, s^i + f\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + f\Gamma^i_{kj} s^j\right] X^k =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} X^k\right) s^i + f\left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} s^j\right) X^k = Xf\cdot s^i + f\cdot(\nabla_X s)^i$$

(on rappelle que $Xf = \dfrac{\partial f}{\partial x^k} X^k$ sur U). □

L'égalité (15) est analogue à la *formule de Leibniz* connue qui donne la dérivée du produit de deux fonctions (et elle se confond avec celle-ci si l'on remplace Xf par $\nabla_X f$).

On suppose une fois de plus que la variété différentiable (de classe C^∞) $\mathscr{B}$ est séparée.

Théorème 1. *On suppose qu'on associe à chaque champ* $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ *l'opérateur*

$$\nabla_X : \Gamma\xi \to \Gamma\xi \tag{16}$$

qui jouit des propriétés a), b) et c) *de la proposition* 2. *Il existe sur le fibré* ξ *une connexion* H *unique par rapport à laquelle les opérateurs* (16) *sont des dérivées covariantes.*

Si $\mathscr{B}$ est séparée, les connexions sur le fibré vectoriel différentiable $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ sont donc en correspondance biunivoque canonique avec les applications $\mathsf{F}\mathscr{B}$-linéaires $\nabla: X \mapsto \nabla_X$ qui associent à chaque champ de vecteurs $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ l'opérateur linéaire

$$\nabla_X : \Gamma\xi \to \Gamma\xi$$

qui vérifie la formule de Leibniz (15). Cela autorise à *définir* souvent les connexions en tant que ces applications ∇ (qu'on appelle toujours les *dérivations covariantes*). Si cette définition manque de tout support sensible, elle présente par contre l'avantage d'être invariante (i.e. elle se passe des voisinages de coordonnées trivialisants).

Dans la suite, on identifie de règle la connexion H et la dérivation ∇ correspondante, et on dit en particulier « connexion ∇ » au lieu de « connexion à laquelle correspond la dérivation covariante ∇ ».

Le théorème 1 est analogue au théorème 1 de III.16, et sa démonstration s'effectue de manière semblable.

Lemme 1. *Pour tout ouvert $U \subset \mathscr{B}$, tout point $b_0 \in U$ et toute section $s \in \Gamma(\xi\,|_U)$, il existe une section $s' \in \Gamma\xi$ et un voisinage W du point b_0 tels que $\overline{W} \subset U$ et*

$$s = s' \text{ sur } W.$$

De plus, $s' = 0$ à l'extérieur de U.

(Cf. lemme 1 de la leçon III.16.)

D é m o n s t r a t i o n. Selon la proposition 2 de III.14, on trouve dans $\mathscr{B}$ des ouverts V et W pour lesquels

$$b_0 \in W,\ \overline{W} \subset V,\ \overline{V} \subset U,$$

et tels qu'il existe pour le couple $(V,\ W)$ la fonction d'Urysohn φ. On pose pour $b \in \mathscr{B}$ quelconque:

$$s'(b) = \begin{cases} \varphi(b)\, s(b) & \text{si } b \in U, \\ 0 & \text{si } b \notin U. \end{cases}$$

On conçoit que s' est une section différentiable (i.e. c'est un élément de $\Gamma\xi$), qu'elle coïncide sur W avec s et qu'elle s'annule à l'extérieur de U. $\square$

Nous dirons de deux sections $s',\ s'' \in \Gamma\xi$ qu'elles *coïncident au voisinage d'un point $b_0 \in \mathscr{B}$* si elles prennent même valeur dans un voisinage de b_0.

Lemme 2. *Si les sections $s',\ s'' \in \Gamma\xi$ coïncident au voisinage de $b_0 \in \mathscr{B}$, il en est de même des sections $\nabla_X s'$ et $\nabla_X s''$ quel que soit le champ de vecteurs $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$.*

(Cf. III.16, corollaire 2 au lemme 1.)

D é m o n s t r a t i o n. Soit $s' = s''$ sur le voisinage U de b_0. Le corollaire 1 au lemme 1 de III.16 implique l'existence d'un voisinage $W \subset U$ de b_0 et d'une fonction différentiable φ sur $\mathscr{B}$ tels que

$$\varphi(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in W, \\ 0 & \text{si } b \notin U. \end{cases}$$

Considérons la section $\varphi\cdot(s'-s'')$. Il est clair qu'elle est nulle sur $\mathcal{B}$ tout entier, i.e. c'est l'élément zéro de l'espace vectoriel $\Gamma\xi$. L'opérateur ∇_X étant linéaire, il en est de même pour la section

(17) $\nabla_X(\varphi\cdot(s'-s'')) = X\varphi\cdot(s'-s'') + \varphi\cdot(\nabla_X(s'-s''))$.

Comme $s'=s''$ et $\varphi=1$ sur W, il en résulte

$$\nabla_X(s'-s'')=0 \quad \text{sur } W,$$

i.e $\nabla_X s'=\nabla_X s''$ sur W. □

On dit que les opérateurs ∇_X sont des opérateurs *locaux par rapport à s.*

On démontre de même que ∇_X le sont *par rapport à X*, i.e. le fait qu'*étant donné deux champs de vecteurs X', X'' quelconques de* $\mathfrak{a}\mathcal{B}$ *qui coïncident au voisinage de* $b_0\in\mathcal{B}$, *les opérateurs* $\nabla_{X'}$ *et* $\nabla_{X''}$ *jouissent de la même propriété* ($\nabla_{X'}s=\nabla_{X''}s$ au voisinage de b_0 pour chaque section $s\in\Gamma\xi$). [Pour obtenir le résultat voulu, il suffit de voir le champ $\varphi\cdot(X'-X'')$.]

Lemme 3. *Quel que soit l'ensemble ouvert* $U\subset\mathcal{B}$, *les opérateurs* (16) *ayant les propriétés* a), b) *et* c) *de la proposition* 2 *induisent les opérateurs uniques*

(18) $$(\nabla|_U)_X\colon \Gamma(\xi|_U)\to\Gamma(\xi|_U),\quad X\in\mathfrak{a}U,$$

jouissant de même des propriétés a), b) *et* c) (*pour l'algèbre* $\mathsf{F}U$) *et tels qu'on ait pour chaque champ* $X\in\mathfrak{a}\mathcal{B}$ *le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc}\Gamma\xi & \xrightarrow{\nabla_X} & \Gamma\xi\\ \downarrow & & \downarrow\\ \Gamma(\xi|_U) & \xrightarrow{(\nabla|_U)_X} & \Gamma(\xi|_U)\end{array}$$

dont les flèches verticales représentent des applications de restriction, i.e. les opérateurs tels que

(19) $$((\nabla|_U)_{X|_U})\, s=(\nabla_X s)|_U$$

pour toute section $s\in\Gamma\xi$.

(Cf. proposition 1 de III.16.)

D é m o n s t r a t i o n. On commence traditionnellement par l'unicité. On suppose que les opérateurs (18) existent et que $s\in\Gamma(\xi|_U)$, $X\in\mathfrak{a}U$. Si l'on s'adresse au lemme 1 et à la remarque 1 de III.16, on voit qu'on trouve pour tout point $b_0\in U$ une section $s'\in\Gamma\xi$ et un champ vectoriel $X'\in\mathfrak{a}\mathcal{B}$ qui coïncident dans son voisinage immédiat avec s et X respectivement. Ce faisant, la propriété (19) entraîne

(20) $$(\nabla|_U)_X(s)](b_0)=[\nabla_{X'}s'](b_0).$$

D'où l'unicité des opérateurs $(\nabla|_U)_X$ du moment que le second membre de cette formule ne dépend pas du choix de s' et X' par suite de la propriété des ∇_X d'être locaux par rapport à s et X.

Passons à l'existence. On considère la formule (20) comme définition de la section $(\nabla|_U)_X(s)$. Autrement dit, on pose

$$(\nabla|_U)_X(s) = \nabla_{X'}(s') \text{ sur } W$$

si $X = X'$ et $s = s'$ sur W. On vérifie sans peine (le faire !) que cette formule définit d'une façon unique les opérateurs (18) présentant toutes les propriétés voulues. □

Afin de simplifier les formules, on écrira ∇ au lieu de $\nabla|_U$.

On dispose maintenant de tous les résultats nécessaires pour passer à la

D é m o n s t r a t i o n du théorème 1. On suppose que la connexion H existe.

Considérons un voisinage trivialisant $U \subset \mathscr{B}$ quelconque, et soient, sur U, les sections $s_1, \ldots, s_n$ formant une base du $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}U$-module $\Gamma(\xi_U|)$, et les champs de vecteurs

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

qui forment une base du $\mathsf{F}U$-module $\mathfrak{a}U$. La formule (13) implique l'égalité

$$\Gamma^i_{kj} = (\nabla_k s_j)^i \tag{21}$$

pour les coefficients Γ^i_{kj}, $i, j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$ quelconques, de H. Cela prouve l'unicité de H (sur U, donc sur $\mathscr{B}$ tout entier puisque U est arbitraire).

On aura l'existence de H si l'on définit les coefficients Γ^i_{kj} sur U par (21). Soit U' un autre voisinage de coordonnées trivialisant, et soit

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} = (\nabla_{k'} s_{j'})^{i'} \quad \text{sur } U'$$

(les notations sont expliquées dans la leçon 10). On a sur l'intersection $U \cap U'$:

$$\nabla_{k'} s_{j'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \nabla(\varphi^j_{j'} s_j) = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial \varphi^j_{j'}}{\partial x^k} s_j + \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \varphi^j_{j'} \nabla s_j$$

$\left(\text{on rappelle que } \dfrac{\partial}{\partial x^{k'}} = \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \dfrac{\partial}{\partial x^k} \text{ et } s_{i'} = \varphi^i_{i'} s_i\right)$, donc

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} \varphi^i_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial \varphi^i_{j'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \varphi^j_{j'} \Gamma^i_{kj}.$$

La dernière égalité est équivalente à l'identité (17) de la leçon 10, si bien que les fonctions Γ^i_{kj} sont les coefficients d'une connexion H. Ce faisant, la formule (21) et les propriétés a), b) et c) des opérateurs

∇_X sur U entraînent de suite que ceux-ci et les dérivées covariantes relativement à la connexion H vérifient les mêmes formules (11). Ainsi, il y a leur coïncidence. □

* * *

Nous avons établi le lemme 3 à l'aide de la seule propriété des opérateurs ∇_X d'être locaux, si bien qu'il reste valable pour toute application linéaire $D\colon \Gamma\xi \to \Gamma\xi$ ayant la même propriété, voire pour l'application $D\colon \Gamma\xi \to \Gamma\eta$, ξ et η étant deux fibrés vectoriels de même base $\mathscr{B}$. Ainsi, l'application D induit pour tout ouvert $U \subset \mathscr{B}$ l'application (manifestement linéaire elle aussi)

$$D\,|_U\colon \Gamma(\xi\,|_U) \to \Gamma(\eta\,|_U), \tag{22}$$

ligne inférieure du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\xi & \xrightarrow{\;D\;} & \Gamma\eta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\xi\,|_U) & \xrightarrow{\;D|_U\;} & \Gamma(\eta\,|_U), \end{array}$$

où les flèches verticales représentent des applications de restriction.

Par ailleurs, on établit facilement que *chaque application* $\mathsf{F}_K\mathscr{B}$-*linéaire* $D\colon \Gamma\xi \to \Gamma\eta$ *est locale*. (La démonstration du lemme 2 reste telle quelle si ce n'est le terme en $X\varphi$ qui est absent de la formule (17).) Aussi, chacune de ces applications induit pour tout ouvert $U \subset \mathscr{B}$ l'application (22).

Problème 4. Démontrer que l'application (22) est $\mathsf{F}_K\mathscr{B}$-linéaire si D l'est.

L'application

$$\varphi\circ\colon \Gamma\xi \to \Gamma\eta,\ s \mapsto \varphi\circ s, \tag{23}$$

induite par un morphisme différentiable arbitraire de fibrés $\varphi\colon \xi \to \to \eta$, est un exemple d'application $\mathsf{F}_K\mathscr{B}$-linéaire $\Gamma\xi \to \Gamma\eta$ (cf. leçon 6). Outre qu'elle est locale, l'application $D = \varphi\circ$ possède une propriété plus forte, savoir

1. *Si* $s'(b_0) = s''(b_0)$, *avec* $b_0 \in \mathscr{B}$, $s', s'' \in \Gamma\xi$, *alors* $(Ds')(b_0) = = (Ds'')(b_0)$.

Il se trouve que *la propriété* 1 *est inhérente à toute application* $\mathsf{F}_K\mathscr{B}$-*linéaire* $D\colon\Gamma\xi \to \Gamma\eta$. En effet, si $s_1, \ldots, s_n$ est une trivialisation du fibré ξ au-dessus du voisinage U du point b_0 et si $s'' - s' = = f^i s_i$ sur U (avec $f^i(b_0) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$), alors

$$(Ds'' - Ds')(b_0) = f^i(b_0)(Ds_i) = 0$$

(la lettre D du second membre désigne $D\,|_U$). Par conséquent, $(Ds')(b_0) = (Ds'')(b_0)$. □

Fort de ces résultats, on démontre aisément la proposition suivante (cf. problème 5 de la leçon 6).

Proposition 3. *Pour toute application* $\mathsf{F}_K\mathscr{B}$*-linéaire* $D: \Gamma\xi \to \Gamma\eta$, *il existe un morphisme unique* $\varphi: \xi \to \eta$ *tel que* $D = \varphi^\circ$.

D é m o n s t r a t i o n. Si $D = \varphi^\circ$, alors $(Ds)(b) = \varphi(s(b))$ pour toute section $s \in \Gamma\xi$ et tout point $b \in \mathscr{B}$, ce qui veut dire qu'on a pour chaque $p \in \mathscr{E}$:

(24) $$\varphi(p) = (Ds)(b),$$

où $b = \pi(p)$ et s est une section pour laquelle $s(b) = \varphi p$. Le second membre de cette relation ne dépend pas du choix de s en vertu de la propriété 1, si bien qu'il y a unicité pour le morphisme φ.

Pour avoir l'existence, on définit φ par la formule (24). Il est clair qu'on définit bien par là même une application fibre à fibre $\varphi: \mathscr{E}^\xi \to \mathscr{E}^\eta$, linéaire dans chaque fibre, qui jouit de la propriété $D = \varphi^\circ$. Aussi, il ne reste à démontrer qu'il s'agit d'une application différentiable. La chose est évidente. En effet, sur tout voisinage $U \subset \mathscr{B}$ trivialisant pour les deux fibrés ξ et η à la fois, l'application φ est définie en coordonnées par la même matrice rectangulaire à éléments les fonctions différentiables sur U que l'application $D|_U$ l'est dans les bases correspondantes des $\mathsf{F}_K U$-modules libres $\Gamma(\xi|_U)$ et $\Gamma(\eta|_U)$. □

La proposition 3 signifie que le $\mathsf{F}_K\mathscr{B}$-module Mor (ξ, η) des morphismes différentiables $\xi \to \eta$ s'identifie naturellement au $\mathsf{F}_K\mathscr{B}$-module $\mathrm{Hom}_{\mathsf{F}_K\mathscr{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\eta)$ des applications $\mathsf{F}_K\mathscr{B}$-linéaires $\Gamma\xi \to \Gamma\eta$:

(25) $$\mathrm{Mor}(\xi, \eta) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{F}_K\mathscr{B}}(\Gamma\xi, \Gamma\eta).$$

(Cf. alinéa succédant au problème 5 de la leçon 6.)

* * *

On rappelle (voir leçon 7) que les métriques sur un fibré vectoriel $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ sur K s'identifient de façon naturelle aux fonctions continues $Q: \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ dont la restriction à chaque fibre $\mathscr{F}_b$, $b \in \mathscr{B}$, est une métrique (fonctionnelle quadratique définie positive) sur cette fibre. Une métrique sur un fibré différentiable ξ est dite *différentiable* si la fonction Q l'est.

Problème 5. Démontrer que *chaque fibré vectoriel différentiable numérotable* ξ *sur* K *est muni d'une métrique différentiable* (cf. proposition 3 de la leçon 7).

On suppose que le fibré ξ sur K est métrisé, auquel cas la formule

$$(s, s')(b) = (s(b), s'(b)), \quad s, s' \in \Gamma\xi, \quad b \in \mathscr{B},$$

définit sur le $F\mathscr{B}$-module $\Gamma\xi$ la fonctionnelle s, $s' \mapsto (s, s')$ à valeurs dans l'algèbre $F_K\mathscr{B}$ et telle que la fonction $(s, s) \in F_K\mathscr{B}$ prenne pour tout $s \in \Gamma\xi$ des valeurs réelles positives et qu'elle soit nulle aux point $b \in \mathscr{B}$, où $s(b) = 0$, et en ces points seulement. Si $K = \mathbb{R}$, la fonctionnelle est bilinéaire (sur l'algèbre $F\mathscr{B}$) et symétrique, et quand $K = \mathbb{C}$, elle est sesquilinéaire et hermitienne. Par abus de langage, on dira que cette fonctionnelle est le *produit scalaire* sur $\Gamma\xi$.

Problème 6. Démontrer que *le module* $\Gamma_K(\xi)|_U)$ *possède sur chaque voisinage trivialisant* $U \subset \mathscr{B}$ *une base orthonormée* $s_1, \ldots, s_n$ (telle que $(s_i, s_j) = \delta_{ij}$ quels que soient $i, j = 1, \ldots, n$). [*Indication.* Prendre une base quelconque et appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.]

Définition 3. Une connexion ∇ sur un fibré ξ muni d'une métrique est dite *compatible avec la métrique* (ou encore *connexion métrique*) si l'on a pour tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ et n'importe quelles sections $s, s' \in \Gamma\xi$:

$$X(s, s') = (\nabla_X s, s') + (s, \nabla_X s'). \tag{26}$$

Proposition 4. *Une connexion* ∇ *sur un fibré* ξ *est métrique si et seulement si, pour tout voisinage trivialisant* U, *la matrice* $\omega = \| \omega^i_j \|$ *des formes de connexion associées à la base orthonormée* $s_1, \ldots, s_n$ *du* $F_K U$*-module* $\Gamma(\xi|_U)$ *est antisymétrique* (resp. *antihermitienne*) *pour* $K = \mathbb{R}$ (resp. *pour* $K = \mathbb{C}$), *i.e. si l'on a pour tout* i *et tout* j, $i, j = 1, \ldots, n$:

$$\omega^i_j + \omega^j_i = 0 \quad \textit{pour}\ K = \mathbb{R}, \quad \omega^i_j + \bar{\omega}^j_i = 0 \quad \textit{pour}\ K = \mathbb{C}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Une condition nécessaire et suffisante pour que (26) ait lieu pour $s, s' \in \Gamma\xi$ quelconques est, c'est clair, qu'elle le soit sur un voisinage trivialisant U arbitraire pour les éléments d'une base quelconque $s_1, \ldots, s_n$ sur U, i.e. que

$$X(s_i, s_j) = (\nabla_X s_i, s_j) + (s_i, \nabla_X s_j), \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{27}$$

D'autre part, la relation (27) s'écrit pour $s_1, \ldots, s_n$ orthonormée:

$$0 = (\nabla_X s_i)^j + (\nabla s_j)^i \quad \text{pour} \quad K = \mathbb{R},$$

$$0 = (\nabla_X s_i)^j + \overline{(\nabla s_j)^i} \quad \text{pour} \quad K = \mathbb{C},$$

$(\nabla_X s_j)^i$ étant les coordonnées de la section s_j. On a le résultat voulu si l'on note que

$$(\nabla_X s_j)^i = \omega^i_j(X)$$

conformément à (13'). □

Problème 7. Démontrer qu'*il existe sur tout fibré vectoriel métrisé numérotable* ξ *une connexion compatible avec la métrique.* [*Indication.* La proposition 4 entraîne l'existence pour un fibré trivial. On se ramène au cas général par une partition de l'unité. Cf. démonstration de la proposition 3 à la leçon 7.]

LEÇON 12

Champs ξ-tensoriels. — Fonctionnelles multilinéaires et champs ξ-tensoriels. — Dérivation covariante des champs ξ-tensoriels. — Cas des champs ξ-covectoriels. — Cas général. — Produit kroneckerien de matrices et produit tensoriel d'opérateurs linéaires. — Foncteurs. — Produit tensoriel de fibrés vectoriels. — Une généralisation. — Produit tensoriel de sections.

Soit $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel différentiable de rang n sur une variété séparée m-dimensionnelle $\mathscr{B}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), et soit donné, pour tout point $b \in \mathscr{B}$, dans l'espace vectoriel $\mathscr{F}_b = \mathscr{F}_b^{\xi}$ un tenseur S_b. On suppose de plus que les tenseurs S_b sont de même type (r, s) pour tout $b \in \mathscr{B}$. Soit $s_1, \ldots, s_n$ une trivialisation différentiable de ξ sur un voisinage $U \subset \mathscr{B}$. Comme les vecteurs $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ forment pour tout $b \in U$ une base de $\mathscr{F}_b$, le tenseur S_b vérifie l'égalité

$$(1) \qquad S_b = S_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}(b)\, s^{i_1}(b) \otimes \ldots \otimes s^{i_r}(b) \otimes s_{j_1}(b) \otimes \ldots \otimes s_{j_s}(b),$$

avec $s^1(b), \ldots, s^n(b)$ la base duale de l'espace dual $\mathscr{F}_b^*$, et $S_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}$ des fonctions définies sur U.

Définition 1. Si, pour une trivialisation différentiable $(U, s_1, \ldots, s_n)$ quelconque, les fonctions $S_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}$ sont différentiables, la correspondance

$$S : b \mapsto S_b$$

s'appelle *champ ξ-tensoriel* (ou encore *ξ-tenseur*) sur $\mathscr{B}$, et les fonctions $S_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}$ en constituent les *composantes* (dans la trivialisation donnée).

En particulier, les *champs ξ-vectoriels* (ce sont des sections de ξ) correspondent au cas $(r, s) = (0, 1)$.

Si $(r, s) = (1, 0)$, S est un *champ ξ-covectoriel*. Un exemple de ce champ (défini sur U) est $s^i : b \mapsto s^i(b)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Quand $\xi = \tau_{\mathscr{X}}$, $\tau_{\mathscr{X}}$ étant un fibré tangent à la variété différentiable $\mathscr{X}$, les champs ξ-tensoriels ne sont autres que les champs de tenseurs sur $\mathscr{X}$ au sens de III.16.

Remarque 1. La tradition veut qu'on dise « *tenseur* $S_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}$ » au lieu de « tenseur S ». Par abus de langage, nous le dirons aussi, mais nous supposerons la trivialisation $(U, s_1, \ldots, s_n)$ choisie et fixée une fois pour toutes.

Problème 1. Montrer que sur l'intersection $U \cap U'$ de deux voisinages trivialisants, les composantes $S^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}$ et $S^{j'_1 \dots j'_s}_{i'_1 \dots i'_r}$ d'un même tenseur S sont liées par les relations

$$S^{j'_1 \dots j'_s}_{i'_1 \dots i'_r} = \varphi^{i_1}_{i'_1} \dots \varphi^{i_r}_{i'_r} \varphi^{j'_1}_{j_1} \dots \varphi^{j'_s}_{j_s} S^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}, \tag{2}$$

avec $\| \varphi^{j'}_{j} \|$ et $\| \varphi^{i}_{i'} \|$ deux matrices de passage réciproques l'une de l'autre (voir leçon 11).

S'agissant d'un fibré tangent, la formule (2) nous est connue dès la leçon III.16.

Tous les champs ξ-tensoriels de type (r, s) donné forment manifestement un module sur l'algèbre $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$ des fonctions différentiables sur $\mathscr{B}$ à valeurs dans K. On désigne ce module par le symbole $\Gamma^s_r\xi$.

Quels que soient les champs S et T (de type (r, s) et (r_1, s_1) respectivement), la formule

$$S \otimes T : b \mapsto S_b \otimes T_b, \ b \in \mathscr{B},$$

définit parfaitement un champ ξ-tensoriel $S \otimes T$ de type $(r + r_1, s + s_1)$ tel que

$$(S \otimes T)^{j_1 \dots j_s j_{s+1} \dots j_{s+s_1}}_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_{r+r_1}} = S^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} T^{j_{s+1} \dots j_{s+s_1}}_{i_{r+1} \dots i_{r+r_1}}.$$

C'est le *produit tensoriel* des champs S et T.

On définit de même le produit tensoriel $S \otimes T \otimes \dots \otimes R$ de champs ξ-tensoriels en nombre quelconque.

Etant donné les produits

$$s^{i_1} \otimes \dots \otimes s^{i_r} \otimes s_{j_1} \otimes \dots \otimes s_{j_s} \tag{3}$$

(champs de ξ-tenseurs sur U), on récrit la formule (1):

$$S = S^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} s^{i_1} \otimes \dots \otimes s^{i_r} \otimes s_{j_1} \otimes \dots \otimes s_{j_s}.$$

Autrement dit, *les tenseurs* (3) *forment une base du* $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}U$*-module* $\Gamma^s_r(\xi|_U)$ (ou *une base du* $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$*-module* $\Gamma^s_r\xi$ *sur* U).

Quand $(r, s) = (1, 0)$, ce sont des champs de ξ-covecteurs $s^1, \dots, s^n$ qui constituent une base du module $\Gamma^0_1\xi$ (noté encore $\Gamma\xi^*$) sur U.

* * *

On note un intérêt particulier des champs de type $(r, 0)$.

Soit S un champ de ce type, et soit $t_1, \dots, t_r \in \Gamma\xi$. Pour toute trivialisation $(U, s_1, \dots, s_n)$ de ξ sur l'ouvert U, on définit la fonction

$$S(t_1, \dots, t_r) = S_{i_1 \dots i_r} t_1^{i_1} \dots t_r^{i_r}, \tag{4}$$

avec $t_1^{i_1}, \ldots, t_r^{i_r}$ les composantes des champs de ξ-vecteurs $t_1, \ldots, t_r$ sur U et $S_{i_1 \ldots i_r}$ celles du champ ξ-tensoriel S.

Problème 2. Montrer que les fonctions (4) définies sur deux voisinages trivialisants U et U' coïncident sur $U \cap U'$.

Cela signifie que *la formule* (4) *définit bien la fonction* $S(t_1, \ldots, t_r)$ *sur la variété* $\mathscr{B}$ *tout entière.*

La fonction $S(t_1, \ldots, t_r)$ est le *produit contracté* du tenseur S et des champs $t_1, \ldots, t_r$.

Tout comme dans le cas des espaces vectoriels, l'application

$$S : \underbrace{\Gamma\xi \times \ldots \times \Gamma\xi}_{r \text{ fois}} \to \mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B} \tag{5}$$

s'appelle *fonctionnelle* $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$*-multilinéaire* si elle est $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-linéaire par rapport à chaque argument.

L'application (5) définie par (4) est (c'est clair) une fonctionnelle $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-multilinéaire.

Problème 3. Montrer que *la correspondance*

tenseur $S \Rightarrow$ *fonctionnelle* (5)

est un isomorphisme du $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-module $\Gamma_r\xi = \Gamma_r^0\xi$ *sur le* $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$*-module de toutes les fonctionnelles* $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$*-multilinéaires* (5).

[*Indication.* Voir remarque 2 de III.18.]

Dans la suite, on identifiera par cet isomorphisme les ξ-tenseurs de type $(r, 0)$ sur $\mathscr{B}$ aux fonctionnelles $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-multilinéaires (5).

En particulier, cette identification implique que les ξ-covecteurs $c \in \Gamma_1\xi = \Gamma\xi^*$ ne sont autres que les fonctionnelles $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-linéaires de la forme

$$c : \Gamma\xi \to \mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}.$$

On désigne encore par $\langle s, c\rangle$ la valeur $c(s)$ de c sur une section $s \in \Gamma\xi$ [$c(s)$ est (on y insiste) une fonction sur $\mathscr{B}$].

* * *

Nous dirons qu'on définit sur $\Gamma_r^s\xi$ une *dérivation covariante* notée ∇ si l'on associe à chaque champ de vecteurs $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ l'opérateur linéaire (sur K)

$$\nabla_X : \Gamma_r^s\xi \to \Gamma_r^s\xi, \tag{6}$$

fonction $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-linéaire de X qui vérifie l'identité de Leibniz

$$\nabla_X (fS) = Xf \cdot S + f\nabla_X S, \quad f \in \mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}, \quad S \in \Gamma_r^s\xi.$$

Les opérateurs ∇_X sont les *dérivations covariantes suivant* X.

Problème 4. Montrer que les opérateurs (6) vérifient deux lemmes analogues aux lemmes 2 et 3 de la leçon 11.

Cela signifie en particulier que les opérateurs ∇ sont définis sur tout voisinage de coordonnées trivialisant U et qu'ils opèrent sur les tenseurs $S \in \Gamma_r^s(\xi\,|_U)$ conformément à la formule

$$\nabla_X S = X^k \nabla_k S,$$

où X^k, $1 \leqslant k \leqslant m$, sont les composantes du champ X sur U, et

(7) $$\nabla_k S = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} S, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

sont les *dérivées covariantes partielles* du ξ-tenseur S.

Par conséquent, on reconstitue univoquement les opérateurs (6) à partir des dérivées partielles (7), donc par leurs composantes $(\nabla_k S)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}$.

Si $(r, s) = (1, 0)$, les opérateurs (6) s'écrivent

(8) $$\nabla_X : \Gamma\xi^* \to \Gamma\xi^*,$$

et ils transforment pour tout U le champ de ξ-covecteurs $c = c_i s^i$ sur U en le champ de ξ-covecteurs

$$\nabla_X c = X^k (\nabla_k c)_i s^i,$$

$(\nabla_k c)_i$ étant les composantes du ξ-covecteur $\nabla_k c$.

* * *

Soit H une connexion donnée sur ξ.

Proposition 1. *Il existe sur le $\mathsf{F}_K\mathscr{B}$-module $\Gamma\xi^*$ une dérivation covariante ∇ unique telle que chaque ξ-covecteur $c \in \Gamma\xi^*$ vérifie pour tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ et toute section $s \in \Gamma\xi$ l'égalité*

(9) $$X\langle s, c\rangle = \langle \nabla_X s, c\rangle + \langle s, \nabla_X c\rangle,$$

où le premier symbole ∇ à droite désigne une dérivation covariante relativement à la connexion H.

Si $X = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$, les composantes du champ ξ-covectoriel $\nabla_k c = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} c$ dans chaque voisinage de coordonnées trivialisant U sont définies par

(10) $$(\nabla_k c)_i = \frac{\partial c_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^j c_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

avec Γ_{ki}^j les coefficients de H.

D é m o n s t r a t i o n. L'égalité (9) est juste pour n'importe quels s, c et X (on le constate sans peine) si et seulement si elle l'est

sur U quelconque pour $X = \frac{\partial}{\partial x^k}$ et $s = s_i$, i.e. si

$$\frac{\partial c_i}{\partial x^k} = \Gamma^j_{ki} c_j + (\nabla_k c)_i$$

(du moment que $\langle s_i, c\rangle = c_i$ et $\nabla_k s_i = \Gamma^{ij}_k s_j$). Cela prouve (10) et l'unicité de ∇ sur $\Gamma\xi^*$. On obtient l'existence si l'on définit les opérateurs (8) par (10), i.e. si l'on pose

$$\nabla_X c = \left(\frac{\partial c_i}{\partial x^k} - \Gamma^j_{ki} c_j\right) X^k s^i \quad \text{sur } U \tag{11}$$

pour tout champ de vecteurs $X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ sur U et tout champ de ξ-covecteurs $c = c_i s^i$ sur U.

Problème 5. Démontrer que

1° *Quels que soient le champ vectoriel $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ et le champ de ξ-covecteurs $c \in \Gamma\xi^*$, les formules* (11) *définissent parfaitement un champ de ξ-covecteurs $\nabla_X c$.* [*Indication.* Si U' est un autre voisinage de coordonnées trivialisant, on a sur $U \cap U'$:

$$X^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} X^k, \quad c_{i'} = \varphi^i_{i'} c_i, \quad s^{i'} = \varphi^{i'}_i s^i,$$

$$\Gamma^{i'}_{k'j'} = \varphi^{i'}_i \varphi^j_{j'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{kj} + \varphi^{i'}_j \frac{\partial \varphi^j_{j'}}{\partial x^{k'}},$$

avec $\|\varphi^i_{i'}\|$ et $\|\varphi^{i'}_i\|$ deux matrices de passage réciproques l'une de l'autre.]

2° *Les applications $\nabla_X \colon \Gamma\xi^* \to \Gamma\xi^*$ constituent une dérivation.* [*Indication.* La $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-linéarité par rapport à X et la K-linéarité par rapport à c sont évidentes. L'identité de Leibniz étant juste pour les opérateurs dérivation partielle usuelle $\frac{\partial}{\partial x^k}$ l'est dans ce cas aussi.]

3° *On a la formule* (9). [*Indication.* Par construction, on a (10).]

Ainsi, la proposition 1 se trouve démontrée. □

* * *

Proposition 2. *Il existe sur les $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-modules $\Gamma^s_r\xi$, $r, s \geqslant 0$, des dérivations ∇ telles que*

1° *Pour deux ξ-tenseurs S et T quelconques et tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$, on ait*

$$\nabla_X (S \otimes T) = \nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T. \tag{12}$$

2° Si $(r, s) = (0, 1)$, ∇ *coïncide avec la dérivation* ∇ *sur* $\Gamma\xi = \Gamma_0^1\xi$ *relativement à la connexion* H, *et si* $(r, s) = (1, 0)$, *elle coïncide avec* ∇ *sur* $\Gamma\xi^* = \Gamma_1^0\xi$ *de la proposition* 1.

Ces dérivations sont uniques, et sur tout voisinage de coordonnées trivialisant U, *les composantes* $(\nabla_k S)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}$ *de la dérivée partielle* $\nabla_k S$ *d'un* ξ*-tenseur* S *arbitraire s'expriment par ses composantes* $S_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}$ *à l'aide des formules*

$$(13)\quad (\nabla_k S)_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} = \frac{\partial S_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^{j_1} S_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{p j_2 \ldots j_s} + \Gamma_{kp}^{j_2} S_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{j_1 p j_3 \ldots j_s} + \ldots + \Gamma_{kp}^{j_s} S_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_{s-1} p} - \Gamma_{k i_1}^{p} S_{p i_2 \ldots i_r}^{j_1 j_2 \ldots j_s} - \Gamma_{k i_2}^{p} S_{i_1 p i_3 \ldots i_r}^{j_1 j_2 \ldots j_s} - \ldots - \Gamma_{k i_r}^{p} S_{i_1 \ldots i_{r-1} p}^{j_1 \ldots j_s}.$$

(Il correspond à chaque indice supérieur un terme à droite précédé du signe « plus » et à chaque indice inférieur un terme précédé du signe « moins ».)

Démonstration. On déduit de (12) par récurrence évidente une relation analogue pour les facteurs en nombre quelconque. On a pour trois ξ-tenseurs S, R et T par exemple

$$\nabla_X (S \otimes T \otimes R) = \nabla_X (S \otimes T) \otimes R + (S \otimes T) \otimes \nabla_X R = (\nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T) \otimes R + (S \otimes T) \otimes \nabla_X R,$$

i.e.

$$\nabla_X (S \otimes T \otimes R) = \nabla_X S \otimes T \otimes R + S \otimes \nabla_X T \otimes R + S \otimes T \otimes \nabla_X R.$$

En particulier, on a pour n'importe quels $s, t \in \Gamma\xi$ et $c \in \Gamma\xi^*$

$$\nabla_X (s \otimes t \otimes c) = \nabla_X s \otimes t \otimes c + s \otimes \nabla_X t \otimes c + s \otimes t \otimes \nabla_X c.$$

Il en résulte pour les composantes des dérivées partielles du champ de ξ-tenseurs $S = s \otimes t \otimes c$

$$(\nabla_k S)_{i_1}^{j_1 j_2} = (\nabla_k s)^{j_1} t^{j_2} c_{i_1} + s^{j_1} (\nabla_k t)^{j_2} c_{i_1} + s^{j_1} t^{j_2} (\nabla_k c)_{i_1} = \left(\frac{\partial s^{j_1}}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^{j_1} s^p\right) t^{j_2} c_{i_1} + s^{j_1} \left(\frac{\partial t^{j_2}}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^{j_2} t^p\right) c_{i_1} + s^{j_1} t^{j_2} \left(\frac{\partial c_{i_1}}{\partial x^k} - \Gamma_{k i_1}^{p} c_p\right) =$$

$$= \frac{\partial s^{j_1}}{\partial x^k} t^{j_2} c_{i_1} + s^{j_1} \frac{\partial t^{j_2}}{\partial x^k} c_{i_1} + s^{j_1} t^{j_2} \frac{\partial c_{i_1}}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^{j_1} s^p t^{j_2} c_{i_1} + \Gamma_{kp}^{j_2} s^{j_1} t^p c_{i_1} - \Gamma_{k i_1}^{p} s^{j_1} t^{j_2} c_p,$$

i.e.

$$(\nabla_k S)_{i_1}^{j_1 j_2} = \frac{\partial S_{i_1}^{j_1 j_2}}{\partial x^k} + \Gamma_{kp}^{j_1} S_{i_1}^{p j_2} + \Gamma_{kp}^{j_2} S_{i_1}^{j_1 p} - \Gamma_{k i_1}^{p} S_{p}^{j_1 j_2}.$$

On a donc établi que, si les dérivations ∇ existent, les champs de la forme $S = s \otimes t \otimes c$ (dits *décomposables*) vérifient pour $(r, s) = (2, 1)$ la formule (13).

Sur chaque voisinage trivialisant $U \subset \mathscr{B}$, chaque champ ξ-tensoriel est par ailleurs une combinaison $F_K\mathscr{B}$-linéaire de champs décomposables (car tout tenseur sur un espace vectoriel est une combinaison K-linéaire de tenseurs décomposables), et on conçoit d'autre part qu'une formule (13) juste pour S et T l'est pour toute combinaison $F_K\mathscr{B}$-linéaire de ces champs (le seul cas douteux est celui du champ fS pour lequel on voit apparaître dans le premier membre le terme supplémentaire $\frac{\partial f}{\partial x^k} S^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$, mais la première somme apparue à droite contient le même facteur). Ainsi, la formule (13) est juste pour tout champ ξ-tensoriel S de type (2, 1), si bien que l'opération ∇, quand elle existe, est unique pour ces champs.

On démontre de même la formule (13) et l'unicité de ∇ pour r et s quelconques.

Afin d'avoir l'existence, on définit le champ ξ-tensoriel $\nabla_X S$ comme un champ à composantes $(\nabla_k S)^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} X^k$ sur chaque voisinage de coordonnées trivialisant U (X^k sont les composantes de X sur U, et $(\nabla_k S)^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$ les fonctions (13)).

Problème 6. Démontrer que dans ce cas

1° *Le champ $\nabla_X S$ est défini d'une façon unique sur toute la variété.*

2° *Les applications $\nabla_X : \Gamma^s_r\xi \to \Gamma^s_r\xi$ forment une dérivation.*

3° *N'importe quels champs ξ-tensoriels S et T vérifient la formule* (12).

Cela démontre la proposition 2. □

Le champ $\nabla_X S$ est la *dérivée covariante du champ ξ-tensoriel S suivant le champ de vecteurs $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ relativement à la connexion H.*

Remarque 2. Les composantes $(\nabla_k S)^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$ du champ $\nabla_k S$ sont encore désignées par $S^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r | k}$, où le trait vertical | est des fois remplacé par une virgule, un point-virgule, ...

* * *

Le procédé d'obtention des dérivées covariantes $\nabla_X S$ s'inspirera d'une idée plus simple (même pour $(r, s) = (0, 1)$) et se perfectionnera en même temps sur le plan formel si l'on se sert de certaines constructions sur les fibrés vectoriels, qui ont leur intérêt propre.

On aura besoin de plusieurs résultats d'algèbre linéaire.

Soit $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$. On choisit un procédé de numérotation des éléments des $(n \times m)$-matrices par les nombres de 1 à nm et on identifie l'espace vectoriel de toutes ces matrices sur K et l'espace K^{nm}.

On désignera donc les vecteurs d'une base standard de $\mathbb{K}^{nm}$ par e_{ik}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant m$, et les éléments des matrices carrées d'ordre nm (matrices des opérateurs linéaires $\mathbb{K}^{nm} \to \mathbb{K}^{nm}$) par c_{ik}^{jl}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $1 \leqslant k, l \leqslant m$.

Avec ces conventions, on associe à deux matrices carrées $A = \| a_i^j \|$ et $B = \| b_k^l \|$ quelconques d'ordre n et m respectivement une matrice $C = \| c_{ik}^{jl} \|$ d'ordre nm telle que

$$c_{ik}^{jl} = a_i^j b_k^l.$$

Définition 2. La matrice $C = \| a_i^j b_k^l \|$ est le *produit kroneckerien* des matrices A et B qu'on note $A \otimes B$.

Afin de traduire cette opération en langage des opérateurs linéaires, on rappelle (voir II.5) qu'on définit pour deux espaces vectoriels $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ quelconques l'espace vectoriel $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$, leur *produit tensoriel*. $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$ a pour éléments des fonctionnelles bilinéaires dont le premier argument parcourt $\mathscr{V}^*$, espace dual de $\mathscr{V}$, et le second l'espace $\mathscr{W}^*$, dual de $\mathscr{W}$. Deux vecteurs $\mathbf{a} \in \mathscr{V}$ et $\mathbf{b} \in \mathscr{W}$ quelconques définissent par

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\xi, \eta) = \xi(\mathbf{a})\,\eta(\mathbf{b}), \quad \xi \in \mathscr{V}^*, \ \eta \in \mathscr{W}^*,$$

le vecteur $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \in \mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$, leur *produit tensoriel*. Ce dernier *dépend linéairement de* $\mathbf{a}$ *et* $\mathbf{b}$, i.e., pour n'importe quels $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a} \in \mathscr{V}$ et $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b} \in \mathscr{W}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{gathered}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b},\\ \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}_2,\\ \lambda\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \lambda\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}).\end{gathered}$$

Soient $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ une base de $\mathscr{V}$, et $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ une base de $\mathscr{W}$. Les vecteurs

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_k, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

forment évidemment une base de l'espace $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$, si bien qu'en particulier, chaque élément de $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$ est exprimé (non univoquement en général) par une combinaison linéaire de vecteurs $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ (i.e. les vecteurs $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ forment une famille génératrice dans $\mathscr{V} \otimes \mathscr{W}$).

Lorsque $\mathscr{V} = \mathbb{K}^n$, $\mathscr{W} = \mathbb{K}^m$, on identifie naturellement la base $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_k$ avec la base $\mathbf{e}_{ik}$ de l'espace $\mathbb{K}^{nm}$, donc le produit tensoriel $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m$ avec l'espace $\mathbb{K}^{nm}$:

$$\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m = \mathbb{K}^{nm}. \tag{14}$$

Deux applications linéaires $\varphi : \mathscr{V} \to \mathscr{V}_1$, $\psi : \mathscr{W} \to \mathscr{W}_1$ arbitraires définissent naturellement l'application linéaire

$$\varphi \otimes \psi : \mathscr{V} \otimes \mathscr{W} \to \mathscr{V}_1 \otimes \mathscr{W}_1, \tag{15}$$

leur *produit tensoriel* tel que

(16) $$(\varphi \otimes \psi)(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \varphi\mathbf{a} \otimes \psi\mathbf{b}$$

pour tout $\mathbf{a}$ de $\mathcal{V}$ et tout $\mathbf{b}$ de $\mathcal{W}$. [On définit encore $\varphi \otimes \psi$ en tant qu'application linéaire $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{W}_1$ (manifestement unique!) qui vérifie (16), mais on se heurte au problème de démontrer son existence. Un procédé plus rationnel consiste à déterminer directement les éléments de $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ comme fonctionnelles bilinéaires.

Problème 7. Construire l'application (15) par deux méthodes indiquées. [Vérifier sans faute que l'application obtenue est linéaire.]

Dans le cas particulier de $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}$, $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}$, i.e. φ et ψ linéaires sont donc les opérateurs linéaires $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $B : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$, le produit tensoriel $\varphi \otimes \psi$ est l'opérateur linéaire

$$A \otimes B : \mathcal{V} \otimes \mathcal{W} \to \mathcal{V} \otimes \mathcal{W},$$

et si A est représenté dans la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ de $\mathcal{V}$ par la matrice $A = \|a_i^j\|$ (i.e. $A\mathbf{e}_i = a_i^j\mathbf{e}_j$), et B est repéré dans la base $\mathbf{f}_1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{f}_m$ de $\mathcal{W}$ par la matrice $B = \| b_k^l \|$ (i.e. $B\mathbf{f}_k = b_k^l\mathbf{f}_l$), alors

$$(A \otimes B)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_k) = A\mathbf{e}_i \otimes B\mathbf{f}_k = a_i^j\mathbf{e}_j \otimes b_k^l\mathbf{f}_l = (a_i^j b_k^l)(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{f}_l).$$

Autrement dit, *la matrice de l'opérateur $A \otimes B$ est le produit kroneckerien $A \otimes B$ des matrices A et B*, ce qui explique le nom de *produit tensoriel* donné à $A \otimes B$.

On note qu'à la différence du produit tensoriel d'opérateurs, le produit kroneckerien de matrices admet un certain arbitraire quant au choix du numérotage des couples (i, k).

* * *

Revenons au cas général des applications linéaires φ et ψ quelconques.

La formule (16) entraîne de suite que

1° *Si* $\varphi = \mathrm{id}$ *et* $\psi = \mathrm{id}$ (*et* $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}$, $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}$), *alors* $\varphi \otimes \psi = \mathrm{id}$.

2° *Les applications linéaires*

(17) $$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}_1, \quad \varphi_1 : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2,$$
$$\psi : \mathcal{W} \to \mathcal{W}_1, \quad \psi_1 : \mathcal{W}_1 \to \mathcal{W}_2$$

arbitraires vérifient la formule

$$(\varphi_1 \otimes \psi_1) \circ (\varphi \otimes \psi) = (\varphi_1 \circ \varphi) \otimes (\psi_1 \circ \psi).$$

Il y a lieu d'introduire la définition générale suivante.

Définition 3. Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux espaces vectoriels arbitraires (qu'on suppose une fois de plus de dimension finie), et soient $\varphi : \mathcal{V} \to$

$\to \mathscr{V}_1$ et $\psi: \mathscr{W} \to \mathscr{W}_1$ deux applications linéaires quelconques. On fait correspondre à $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ l'espace vectoriel $\Phi(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ et à φ et ψ l'application linéaire

$$\Phi(\varphi, \psi): \Phi(\mathscr{V}, \mathscr{W}) \to \Phi(\mathscr{V}_1, \mathscr{W}_1).$$

Si

a) $\Phi(\text{id}, \text{id}) = \text{id}$;

b) pour les applications linéaires (17) quelconques, on a

$$\Phi(\varphi_1, \psi_1) \circ \Phi(\varphi, \psi) = \Phi(\varphi_1 \circ \varphi, \psi_1 \circ \psi),$$

on dit que Φ est un *foncteur double* ou encore un *bifoncteur* (de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie dans elle-même).

Exemple 1. Etant donné les propriétés de l'opération $\otimes$, si l'on pose

$$\Phi(\mathscr{V}, \mathscr{W}) = \mathscr{V} \otimes \mathscr{W}, \quad \Phi(\varphi, \psi) = \varphi \otimes \psi,$$

on obtient un foncteur double appelé *foncteur produit tensoriel.*

Exemple 2. On pose

$$\Phi(\mathscr{V}, \mathscr{W}) = \mathscr{V} \oplus \mathscr{W}, \quad \Phi(\varphi, \psi) = \varphi \oplus \psi$$

(par définition, $(\varphi \oplus \psi)\ (a, b) = (\varphi a, \psi b)$ pour tout $a \in \mathscr{V}$ et tout $b \in \mathscr{W}$) et on a évidemment encore un foncteur double appelé *foncteur somme directe.*

On définit de même les *fonctions k-uples* pour tout $k \geqslant 1$. Ainsi, le *foncteur d'une variable* Φ associe à tout espace vectoriel $\mathscr{V}$ l'espace vectoriel $\Phi(\mathscr{V})$ et à toute application linéaire $\varphi: \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ l'application linéaire

$$\Phi(\varphi): \Phi(\mathscr{V}) \to \Phi(\mathscr{W}),$$

et

a) $\Phi(\text{id}) = \text{id}$;

b) $\Phi(\varphi_1) \circ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi_1 \circ \varphi)$, quelles que soient les applications linéaires $\varphi: \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ et $\varphi_1: \mathscr{W} \to \mathscr{W}_1$.

Exemple 3 et problème 8. Soit $\Lambda^p\mathscr{V}$ l'espace des tenseurs antisymétriques de degré $p \geqslant 0$ sur l'espace $\mathscr{V}$. Définir pour toute application linéaire $\varphi: \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ l'application linéaire

$$\Lambda^p\varphi: \Lambda^p\mathscr{V} \to \Lambda^p\mathscr{W}$$

de façon à obtenir un foncteur avec $k = 1$. On lui donne le nom de *foncteur puissance extérieure p-ième.*

Les foncteurs introduits sont dits *covariants* car il en existe d'autres qui sont *contravariants.* Ainsi, le *foncteur contravariant* d'une variable Φ associe à chaque espace vectoriel $\mathscr{V}$ l'espace vectoriel $\Phi(\mathscr{V})$ et à chaque application linéaire $\varphi: \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ l'application

linéaire

$$\Phi(\varphi):\Phi(\mathscr{W})\to\Phi(\mathscr{V})$$

(on signale le sens contraire de la flèche!), et

a) $\Phi(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$;

b) $\Phi(\varphi)\circ\Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_1\circ\varphi)$ pour deux applications linéaires $\varphi:\mathscr{V}\to\mathscr{W}$ et $\varphi_1:\mathscr{W}\to\mathscr{W}_1$ quelconques.

Exemple 4. Un exemple de foncteur contravariant d'une variable est le *foncteur dualité*

$$\mathscr{V}\mapsto\mathscr{V}^*,\quad \varphi\mapsto\varphi^*$$

qui fait correspondre à un espace vectoriel $\mathscr{V}$ l'*espace dual* $\mathscr{V}^*$ et à l'application linéaire $\varphi:\mathscr{V}\to\mathscr{W}$ l'*application adjointe* $\varphi^*:\mathscr{W}^*\to\mathscr{V}^*$ (définie par la formule $\varphi^*(\eta)(a) = \xi(\varphi a)$, $a\in\mathscr{V}$, $\xi\in\mathscr{W}^*$; cf. définition 3 de II.14).

On définit de façon très générale un foncteur mixte k-uple qui est covariant en certaines variables et contravariant en d'autres.

Problème 9. Formuler la définition correspondante complète.

Exemple 5. Le foncteur Hom fait correspondre aux espaces $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathscr{V},\mathscr{W})$ de toutes les applications linéaires $\mathscr{V}\to\mathscr{W}$ et à deux applications linéaires $\varphi:\mathscr{V}\to\mathscr{V}_1$, $\psi:\mathscr{W}\to\mathscr{W}_1$ quelconques l'application linéaire

$$\mathrm{Hom}(\varphi,\psi):\mathrm{Hom}(\mathscr{V}_1,\mathscr{W})\to\mathrm{Hom}(\mathscr{V},\mathscr{W}_1)$$

définie par

$$\mathrm{Hom}(\varphi,\psi)(\alpha) = \psi\circ\alpha\circ\varphi,\quad \alpha:\mathscr{V}_1\to\mathscr{W}.$$

C'est un bifoncteur contravariant en première variable et covariant en seconde.

Il existe des foncteurs qui transforment des espaces vectoriels sur un corps en des espaces sur un corps différent. C'est le cas par exemple du *foncteur complexification* $\mathscr{V}\mapsto\mathscr{V}^{\mathbf{C}}$ qui transforme un espace vectoriel $\mathscr{V}$ sur $\mathbf{R}$ en son complexifié $\mathscr{V}^{\mathbf{C}}$, espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, et du *foncteur décomplexification* $\mathscr{W}\mapsto\mathscr{W}_{\mathbf{R}}$ qui fait d'un espace vectoriel $\mathscr{W}$ sur $\mathbf{C}$ son décomplexifié $\mathscr{W}_{\mathbf{R}}$.

Problème 10. Démontrer que

$$(\mathscr{V}^{\mathbf{C}})_{\mathbf{R}} = \mathscr{V}\oplus\mathscr{V}\quad\text{et}\quad(\mathscr{W}_{\mathbf{R}})^{\mathbf{C}} = \mathscr{W}\oplus\overline{\mathscr{W}},$$

avec $\overline{\mathscr{W}}$ l'espace complexe conjugué de $\mathscr{W}$.

On note que *tout foncteur transforme un isomorphisme en un isomorphisme*, i.e. si φ et ψ sont des isomorphismes, il en est de même de $\Phi(\varphi,\psi)$ (pour fixer les idées, on se borne aux foncteurs doubles).

On considérera de règle des foncteurs (et on reste toujours dans le cas des bifoncteurs) tels que, si $\mathcal{V} = \mathsf{K}^n$ et $\mathcal{W} = \mathsf{K}^m$, l'espace $\Phi(\mathsf{K}^n, \mathsf{K}^m)$ s'identifie à K^N, N étant un nombre dépendant de n et m. Par exemple, $N = n + m$ pour le foncteur somme directe, $N = nm$ pour le foncteur produit tensoriel, et $N = n$ pour le foncteur dualité d'une variable.

Avec cette condition, quels que soient les isomorphismes $A : \mathsf{K}^n \to \mathsf{K}^n$ et $B : \mathsf{K}^m \to \mathsf{K}^m$ (i.e. les matrices $A \in \mathrm{GL}(n; \mathsf{K})$ et $B \in \mathrm{GL}(m; \mathsf{K})$), l'isomorphisme $\Phi(A, B)$ est une matrice de $\mathrm{GL}(N; \mathsf{K})$, si bien que la correspondance $(A, B) \mapsto \Phi(A, B)$ constitue une application

$$\mathrm{GL}(n; \mathsf{K}) \times \mathrm{GL}(m; \mathsf{K}) \to \mathrm{GL}(N; \mathsf{K}). \tag{18}$$

Nous dirons du foncteur Φ qu'il est *continu* si tel est le cas de l'application (18), et qu'il est *différentiable* (pour $\mathsf{K} = \mathbb{R}$) si l'application (18) l'est.

Tous les foncteurs des exemples 1 à 5 sont manifestement continus, et ils sont différentiables pour $\mathsf{K} = \mathbb{R}$.

* * *

Soient $\xi = (\mathscr{E}^\xi, \pi^\xi, \mathscr{B})$ et $\eta = (\mathscr{E}^\eta, \pi^\eta, \mathscr{B})$ deux fibrés vectoriels sur K de rang n et m respectivement et de même base $\mathscr{B}$ (qu'on regarde pour l'instant comme espace topologique arbitraire). Soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert de $\mathscr{B}$, formé de voisinages trivialisants pour chacun de ces fibrés (ce recouvrement existe évidemment toujours). Soient ensuite

$$\varphi^\xi_\alpha : U_\alpha \times \mathsf{K}^n \to \mathscr{E}^\xi_{U_\alpha} \quad \text{et} \quad \varphi^\eta_\alpha : U_\alpha \times \mathsf{K}^m \to \mathscr{E}^\eta_{U_\alpha}$$

des trivialisations de ξ et η sur U_α, et

$$\varphi^\xi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(n; \mathsf{K}) \quad \text{et} \quad \varphi^\eta_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(m; \mathsf{K})$$

les applications de transition correspondantes.

On définit les applications

$$\varphi^\xi_{\beta\alpha} \otimes \varphi^\eta_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(nm; \mathsf{K})$$

si l'on pose pour tout point $b \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$(\varphi^\xi_{\beta\alpha} \otimes \varphi^\eta_{\beta\alpha})(b) = \varphi^\xi_{\beta\alpha}(b) \otimes \varphi^\eta_{\beta\alpha}(b).$$

Il y a évidemment continuité (et différentiabilité si, $\mathscr{B}$ étant supposée être une variété, les applications $\varphi^\xi_{\beta\alpha}$ et $\varphi^\eta_{\beta\alpha}$ jouissent de cette propriété). On vérifie automatiquement (par recours aux propriétés fonctorielles seules de $\otimes$) qu'elles forment un cocycle de $\{U_\alpha\}$

sur le groupe GL (nm; K). Aussi, on trouve (voir proposition 2 de la leçon 6) un fibré vectoriel ζ de rang nm sur K admettant un recouvrement trivialisant $\{U_\alpha\}$, tel que

$$\varphi^\zeta_{\beta\alpha} = \varphi^\xi_{\beta\alpha} \otimes \varphi^\eta_{\beta\alpha}$$

pour tout α et tout β. Ce fibré est différentiable s'il en est ainsi pour les fibrés ξ et η.

On a construit ζ muni d'un recouvrement trivialisant $\{U_\alpha\}$. Une question se pose logiquement : quelle est la dépendance de ζ vis-à-vis de $\{U_\alpha\}$?

Par construction (voir leçon 6), le fibré ζ intervient de concert avec certaines trivialisations

$$\varphi^\zeta_\alpha : U_\alpha \times \mathsf{K}^{nm} \to \mathscr{E}^\zeta_{U_\alpha}$$

liées aux applications $\varphi^\zeta_{\beta\alpha} = \varphi^\xi_{\beta\alpha} \otimes \varphi^\eta_{\beta\alpha}$ par les formules

$$\varphi^\zeta_{\beta\alpha}(b) = (\varphi^\zeta_{\beta,\, b})^{-1} \circ \varphi^\zeta_{\alpha,\, b},$$

où, par exemple, $\varphi^\zeta_{\alpha,\, b}$ est l'isomorphisme $\mathsf{K}^{nm} \to \mathscr{F}^\zeta_b$, $b \in U_\alpha$, défini par

$$\varphi^\zeta_{\alpha,\, b}(\mathbf{x}) = \varphi^\zeta_\alpha(b, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathsf{K}^{nm}.$$

De même

$$\varphi^\xi_{\beta\alpha}(b) = (\varphi^\xi_{\beta,\, b})^{-1} \circ \varphi^\xi_{\alpha,\, b} \quad \text{et} \quad \varphi^\eta_{\beta\alpha} = (\varphi^\eta_{\beta,\, b})^{-1} \circ \varphi^\eta_{\alpha,\, b},$$

où, disons,

$$\varphi^\xi_{\alpha,\, b}(\mathbf{x}) = \varphi^\xi_\alpha(b, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathsf{K}^n.$$

Aussi, on a pour l'application

$$(\varphi^\xi_{\alpha,\, b} \otimes \varphi^\eta_{\alpha,\, b}) \circ (\varphi^\zeta_{\alpha,\, b})^{-1} : \mathscr{F}^\zeta_b \to \mathscr{F}^\xi_b \otimes \mathscr{F}^\eta_b, \quad b \in U_\alpha \cap U_\beta,$$

$$(\varphi^\xi_{\alpha,\, b} \otimes \varphi^\eta_{\alpha,\, b}) \circ (\varphi^\zeta_{\alpha,\, b})^{-1} =$$
$$= [(\varphi^\xi_{\beta,\, b} \circ \varphi^\xi_{\beta\alpha}(b)) \otimes (\varphi^\eta_{\beta,\, b} \circ \varphi^\eta_{\beta\alpha}(b))] \circ [(\varphi^\zeta_{\beta\alpha}(b))^{-1} \circ (\varphi^\zeta_{\beta,\, b})^{-1}] =$$
$$= (\varphi^\xi_{\beta,\, b} \otimes \varphi^\eta_{\beta,\, b}) \circ [(\varphi^\xi_{\beta\alpha}(b) \otimes \varphi^\eta_{\beta\alpha}(b)) \circ (\varphi^\zeta_{\beta\alpha}(b))^{-1}] \circ (\varphi^\zeta_{\beta,\, b})^{-1} =$$
$$= (\varphi^\xi_{\beta,\, b} \otimes \varphi^\eta_{\beta,\, b}) \circ (\varphi^\zeta_{\beta,\, b})^{-1}$$

(on rappelle que $\varphi^\zeta_{\beta\alpha}(b) = \varphi^\xi_{\beta\alpha}(b) \otimes \varphi^\eta_{\beta\alpha}(b)$ par définition).

Ainsi, la formule

$$f(p) = (\varphi^\xi_{\alpha,\, b} \otimes \varphi^\eta_{\alpha,\, b}) \circ (\varphi^\zeta_{\alpha,\, b})^{-1}(p),$$

$p \in U_\alpha$, $b = \pi(p)$, définit bien l'application (évidemment bijective)

$$f : \mathscr{E}^\zeta \to \mathscr{E},$$

où

$$\mathscr{E} = \bigsqcup_{b \in \mathscr{B}} \mathscr{F}_b^\xi \otimes \mathscr{F}_b^\eta$$

est la réunion disjointe des espaces vectoriels $\mathscr{F}_b^\xi \otimes \mathscr{F}_b^\eta$, $b \in \mathscr{B}$. (On note que chaque fibre $\mathscr{F}_b^\zeta$ est appliquée isomorphiquement par f sur l'espace $\mathscr{F}_b^\xi \otimes \mathscr{F}_b^\eta$.)

On transporte à $\mathscr{E}$ par f la topologie (et la différentiabilité pour ξ et η différentiables) de $\mathscr{E}^\zeta$. Il est clair que le triplet $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, avec $\pi: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ la projection naturelle, est un fibré vectoriel (muni des trivialisations de la forme $f \circ \varphi_\alpha^\zeta$) et que l'application f constitue un isomorphisme de fibrés vectoriels.

Un ensemble de l'espace $\mathscr{E}^\zeta$ est ouvert si et seulement si son intersection avec chacun des ensembles $\mathscr{E}_{U_\alpha}^\zeta = (\pi^\zeta)^{-1} U_\alpha$ l'est (dans $\mathscr{E}_{U_\alpha}^\zeta$), donc (le démontrer!) si et seulement si, pour tout ouvert $U \subset \subset \mathscr{B}$ sur lequel ξ et η sont triviaux, son intersection avec $\mathscr{E}_U^\zeta$ est ouverte dans $\mathscr{E}_U^\zeta = (\pi^\zeta)^{-1}U$. Aussi, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit ouvert dans $\mathscr{E}$ est que son intersection avec $\mathscr{E}_U$ le soit dans $\mathscr{E}_U = \pi^{-1}U$ pour un tel U.

Comme la topologie de $\mathscr{E}_U$ est le produit direct de topologies de U et $\mathbb{K}^n$ (le démontrer!), on vient de prouver que la topologie dans $\mathscr{E}$ ne dépend pas du choix du recouvrement $\{U_\alpha\}$. Par conséquent, *le fibré* $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *est défini parfaitement* (il est indépendant du choix de $\{U_\alpha\}$) du moment que les éléments restants de $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ jouissent manifestement de la même propriété concernant $\{U_\alpha\}$.

Définition 4. Le fibré vectoriel $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ s'appelle *produit tensoriel* des fibrés ξ et η et se note $\xi \otimes \eta$. Il est différentiable dès que ξ et η le sont.

Une fibre de $\xi \otimes \eta$ au-dessus d'un point $b \in \mathscr{B}$ quelconque est le produit tensoriel des fibres de ξ et η:

$$\mathscr{F}_b^{\xi \otimes \eta} = \mathscr{F}_b^\xi \otimes \mathscr{F}_b^\eta.$$

Le fibré ζ construit plus haut est isomorphe à $\xi \otimes \eta$, si bien que ses applications de transition $\varphi_{\beta\alpha}^\zeta$ sont également celles de $\xi \otimes \eta$.

* * *

La construction du fibré $\xi \otimes \eta$ se généralise immédiatement à tout foncteur continu.

Problème 11. Soient donnés un foncteur continu k-uple quelconque Φ sur la catégorie des espaces vectoriels (qui est covariant en certaines variables et contravariant en d'autres) et les fibrés vectoriels $\xi_1, \ldots, \xi_k$ quelconques sur $\mathscr{B}$. Construire le fibré vectoriel

$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ dont la fibre au-dessus d'un point arbitraire b de $\mathscr{B}$ est l'espace vectoriel $\Phi(\mathscr{F}_b^{\xi_1}, \ldots, \mathscr{F}_b^{\xi_k})$. S'arrêter sur les fibrés ξ^*, $\Lambda^p\xi$, $\xi \oplus \eta$ et $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$ pour lesquels

$$\mathscr{F}_b^{\xi^*} = (\mathscr{F}_b^{\xi})^*, \quad \mathscr{F}_b^{\Lambda^p\xi} = \Lambda^p\mathscr{F}_b^{\xi}, \quad \mathscr{F}^{\xi\oplus\eta} = \mathscr{F}_b^{\xi} \oplus \mathscr{F}_b^{\eta}$$

et

$$\mathscr{F}_b^{\mathrm{Hom}(\xi,\, \eta)} = \mathrm{Hom}(\mathscr{F}_b^{\xi}, \mathscr{F}_b^{\eta})$$

respectivement.

Démontrer que le fibré $\xi \oplus \eta$ n'est autre que la somme de Whitney de ξ et η obtenue dans l'exemple 2 de la leçon 7.

Exemple 6. On définit pour une variété différentiable quelconque $\mathscr{X}$ le fibré vectoriel différentiable

$$\tau^*_{\mathscr{X}} = \tau^*\mathscr{X} = (\mathrm{T}^*\mathscr{X}, \pi, \mathscr{X})$$

dont les fibres sont les espaces cotangents $\mathrm{T}^*_p\mathscr{X}$ de $\mathscr{X}$. Il s'agit d'un *fibré cotangent sur* $\mathscr{X}$. Chaque carte $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ de $\mathscr{X}$ définit une trivialisation $\varphi : U \otimes \mathbb{R}^n \to \mathrm{T}^*U$ de $\tau^*_{\mathscr{X}}$ sur U telle que

$$\varphi(p, \mathrm{a}) = a_i\,(dx^i)_p,$$

avec $p \in U$ et $\mathrm{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ce fibré admet comme sections des formes différentielles linéaires sur $\mathscr{X}$.

Exemple 7. Plus généralement, on définit pour tout $r \geqslant 0$ un fibré $\Lambda^r\tau^*\mathscr{X}$ sur $\mathscr{X}$.

Problème 12. Montrer que les sections du fibré $\Lambda^r\tau^*\mathscr{X}$ sont exactement les formes différentielles de degré r sur $\mathscr{X}$.

Problème 13. Montrer que les fibrés $\Lambda^r\tau^*\mathscr{X}$ et $(\Lambda^r\tau\mathscr{X})^*$ sont canoniquement isomorphes. [*Indication.* Quel que soit l'espace vectoriel $\mathscr{V}$, il existe un isomorphisme canonique entre $\Lambda^r\mathscr{V}^*$ et $(\Lambda^r\tau\mathscr{X})^*$.]

Exemple 8. Soient $r \geqslant 0$ et $s \geqslant 0$ des entiers positifs. Le fibré

$$\underbrace{\tau^*_{\mathscr{X}} \otimes \ldots \otimes \tau^*_{\mathscr{X}}}_{r \text{ fois}} \otimes \underbrace{\tau_{\mathscr{X}} \otimes \ldots \tau_{\mathscr{X}}}_{s \text{ fois}}$$

noté $\tau_r^s\mathscr{X}$ est un *fibré tensoriel de type* (r, s) *sur* $\mathscr{X}$. Ses sections sont des champs de tenseurs de type (r, s) sur $\mathscr{X}$ (voir leçon III.16.)

Plus généralement, on pose pour tout fibré vecteur ξ :

$$T_r^s\xi = \underbrace{\xi^* \otimes \ldots \otimes \xi^*}_{r \text{ fois}} \otimes \underbrace{\xi \otimes \ldots \otimes \xi}_{s \text{ fois}}.$$

Ainsi, $\tau_r^s\mathscr{X} = T_r^s\tau\mathscr{X}$.

Remarque 3. Les sections de $T_r^s\xi$ sont exactement les champs ξ-tensoriels de type (r, s) sur $\mathscr{B}$ que nous avons définis plus haut.

Il s'ensuit que les modules $\Gamma_r^s\xi$ introduits à cette occasion sont les modules des sections $\Gamma T_r^s\xi$ du fibré $T_r^s\xi$:

$$\Gamma_r^s\xi = \Gamma T_r^s\xi,$$

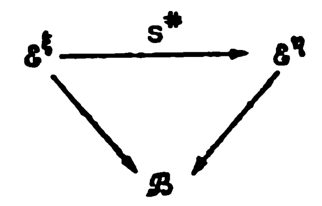
et la dérivation ∇ sur ces modules est la dérivation covariante (6) (ce qui entraîne en particulier que le problème 4 est évident et inutile).

Dans cet ordre d'idées, les propositions 1 et 2 consistent à affirmer l'existence (et l'unicité) des connexions sur les fibrés ξ^* et $T_r^s\xi$, qui sont liées à la connexion donnée ∇ sur ξ par les relations (9) et (12).

Problème 14. Chaque section s du fibré Hom (ξ, η) fait correspondre à tout $b \in \mathscr{B}$ l'application linéaire $s(b)\colon \mathscr{F}_b^\xi \to \mathscr{F}_b^\eta$, si bien que la formule

$$s^\#(p) = s(b)\,p, \quad p \in \mathscr{E}^\xi,$$

avec $b = \pi(p)$, définit l'application $s^\#\colon \mathscr{E}^\xi \to \mathscr{E}^\eta$ du diagramme commutatif



Montrer que $s^\#$ est continue (et différentiable si la section s l'est), i.e. qu'il s'agit d'un morphisme $\xi \to \eta$. Montrer de même que *la correspondance*

$$s \mapsto s^\#$$

définit un isomorphisme du $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$*-module* Γ (Hom (ξ, η)) *de toutes les sections du fibré* Hom (ξ, η) *sur le* $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$*-module* Mor (ξ, η) *de tous les morphismes* $\xi \to \eta$.

Ainsi,

$$\text{Mor}(\xi, \eta) = \Gamma(\text{Hom}(\xi, \eta)) \tag{19}$$

et les morphismes $\xi \to \eta$ ne sont autres que les sections de Hom (ξ, η).

* * *

Quelles que soient les sections $s^\xi\colon \mathscr{B} \to \mathscr{E}^\xi$ et $s^\eta\colon \mathscr{B} \to \mathscr{E}^\eta$ des fibrés ξ et η, l'égalité

$$(s^\xi \otimes s^\eta)(b) = s^\xi(b) \otimes s^\eta(b), \quad b \in \mathscr{B},$$

définit la section

$$s^\xi \otimes s^\eta\colon \mathscr{B} \to \mathscr{E}^{\xi\otimes\eta}$$

du fibré $\xi \otimes \eta$, qu'on appelle *produit tensoriel* des sections s^ξ et s^η.

Si ξ et η sont triviaux sur un ouvert U, les sections

$$s_i^{\xi} \otimes s_k^{\eta}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

forment évidemment, pour les bases

$$s_1^{\xi}, \ldots, s_n^{\xi} \quad \text{et} \quad s_1^{\eta}, \ldots, s_m^{\eta}$$

arbitraires des $F_K\mathscr{B}$-modules $\Gamma\xi$ et $\Gamma\eta$ sur U, une base du $F_K\mathscr{B}$-module $\Gamma(\xi \otimes \eta)$ sur U. Par conséquent, *toute section du fibré $\xi \otimes \eta$ sur U admet une représentation unique, savoir*

$$s^k \otimes s_k^{\eta}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

s^k étant des sections de ξ sur U.

Problème 15. Montrer que la dernière affirmation reste valable pour ξ non trivial sur U.

LEÇON 13

Différentielle covariante. — Comparaison de trois définitions d'une connexion. — Groupes de Lie. — Exemples de groupes de Lie. — Algèbre de Lie d'un groupe de Lie. — Espace tangent à l'unité. — Formule pour le crochet.

Soit $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un K-fibré vectoriel différentiable quelconque de rang n sur une variété différentiable de dimension m, et soit $\tau^*_{\mathscr{B}} = (\mathrm{T}^*\mathscr{B}, \pi, \mathscr{B})$ un fibré cotangent sur $\mathscr{B}$ (pour $\mathsf{K} = \mathsf{R}$) ou son complexifié si $\mathsf{K} = \mathbf{C}$. Considérons le K-fibré vectoriel différentiable $\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi$ et le $\mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$-module $\Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi)$ de ses sections différentiables.

Définition 1. Une application linéaire (sur K)

$$\nabla : \Gamma\xi \to \Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi)$$

est une *dérivation covariante* si elle vérifie l'identité de Leibniz, i.e. si l'on a, pour toute fonction $f \in \mathsf{F}_{\mathsf{K}}\mathscr{B}$ et toute section $s \in \Gamma\xi$,

$$\nabla(fs) = \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla s. \qquad (1)$$

(On rappelle que $\mathrm{d}f$ est une section du fibré $\tau^*_{\mathscr{B}}$, si bien que $\mathrm{d}f \otimes s$ l'est pour $\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi$.)

La section ∇s de $\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi$ s'appelle *différentielle covariante* de la section s.

Si $\mathscr{B}$ est une variété séparée, la formule (1) entraîne (on en a vu un exemple) que *l'application* ∇ *est locale*, i.e. que les sections ∇s_1 et ∇s_2 sont égales au voisinage d'un point $b_0 \in \mathscr{B}$ dès qu'il en est ainsi pour les sections s_1 et s_2. [En effet, si $s_1 = s_2$ sur un voisinage U de b_0 et que φ soit une fonction différentiable sur $\mathscr{B}$, égale à 1 sur un voisinage $W \subset U$ de ce point et à 0 à l'extérieur de U, alors la section $\varphi\cdot(s_2 - s_1)$ est identiquement nulle, d'où

$$\mathrm{d}\varphi\cdot(s_2 - s_1) + \varphi\cdot\nabla(s_2 - s_1) = 0 \text{ sur } \mathscr{B}.$$

Aussi, $\nabla(s_2 - s_1) = 0$ sur W.] La propriété décrite de ∇ implique à son tour (cf. leçon 11) que ∇ définit pour tout ouvert $U \subset \mathscr{B}$ la

dérivation $\nabla\,|_U$ pour le fibré $\xi\,|_U$ du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\xi & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}}\otimes\xi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\xi|_U) & \xrightarrow{\nabla|_U} & \Gamma((\tau^*_{\mathscr{B}}\otimes\xi)|_U)=\Gamma(\tau^*_U\otimes(\xi|_U)), \end{array}$$

où les flèches verticales représentent les applications de restriction. Ce faisant, on reconstitue univoquement ∇ à partir de $\nabla\,|_{U_\alpha}$ quel que soit le recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de la variété $\mathscr{B}$.

D'autre part, si U est un voisinage de coordonnées trivialisant dans $\mathscr{B}$ et si $\{s_i;\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ est une base du $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}U$-module $\Gamma(\xi|_U)$, alors $\{dx^k\otimes s_i;\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant m\}$ est une base du $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}U$-module $\Gamma((\tau^*_{\mathscr{B}}\otimes\xi)|_U)$ et on a pour tout $j=1,\ldots,n$ une égalité

(2) $$\nabla s_j=\Gamma^i_{kj}\,dx^k\otimes s_i,\quad \Gamma^i_{kj}\in\mathsf{F}_{\mathbb{K}}U,$$

i.e.

(2') $$\nabla s_j=\omega^i_j\otimes s_i,\quad \omega^i_j=\Gamma^i_{kj}\,dx^k\in\Omega^1U$$

(afin d'alléger les formules on substitue ∇ à $\nabla|_U$), et les formes ω^i_j (ou, ce qui revient au même, les fonctions Γ^i_{kj}) définissent parfaitement (par

(3) $$\nabla s=(ds^i+\omega^i_js^j)\otimes s_i,$$

avec $s=s^is_i$) la dérivation ∇ (plus précisément $\nabla\,|_U$).

Problème 1. Montrer que s'agissant de ω^i_j *quelconques* sur U, l'application ∇ définie par (3) est une dérivation covariante sur U.

Soit U' un autre voisinage de coordonnées trivialisant (muni de la trivialisation $s_{1'},\ldots,s_{n'}$), et soit

(2") $$\begin{aligned} &\nabla s_{j'}=\omega^{i'}_{j'}\otimes s_{i'} && \text{sur } U',\\ &s_{i'}=\varphi^i_{i'}s_i,\quad s_i=\varphi^{i'}_is_{i'} && \text{sur } U\cap U'. \end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$\nabla s_{j'}=d\varphi^i_{j'}\otimes s_i+\varphi^i_{j'}\nabla s_i=d\varphi^i_{j'}\otimes s_i+\varphi^i_{j'}\omega^j_i\otimes s_j=$$
$$=(d\varphi^i_{j'}+\varphi^j_{j'}\omega^i_j)\otimes(\varphi^{i'}_is_{i'})=\varphi^{i'}_i(d\varphi^i_{j'}+\varphi^j_{j'}\omega^i_j)\otimes s_{i'},$$

donc

(4) $$\omega^{i'}_{j'}=\varphi^{i'}_i\varphi^j_{j'}\omega^i_j+\varphi^{i'}_i\,d\varphi^i_{j'}.$$

Inversement, si l'on se donne sur U et U' les dérivations covariantes définies par (2') et (2") respectivement et si les relations (4) sont justes, alors ces dérivations coïncident sur $U\cap U'$ (plus pré-

cisément, ce sont leurs restrictions à cette intersection qui coïncident).

Ainsi, on a la

Proposition 1. *Soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert d'une variété séparée $\mathscr{B}$, formé de voisinages trivialisants munis d'un système de coordonnées. Chaque dérivation covariante ∇ définit pour tout α les formes $\omega^i_j = \overset{(\alpha)}{\omega^i_j}$ sur U_α, et ces formes sur $U = U_\alpha$ et $U' = U_\beta$ sont liées sur $U \cap U'$ par* (4) *quels que soient α et β.*

Inversement, la donnée, pour tout α, des formes $\omega^i_j = \overset{(\alpha)}{\omega^i_j}$ liées par les relations (4) *définit bien une dérivation covariante ∇ qui opère sur chaque U_α par la formule* (3). □

* * *

Or, les relations (4) sont exactement les formules (17′) de la leçon 10. Si l'on compare donc l'affirmation 1 avec la proposition 4 de ladite leçon, il vient de suite que *les dérivations covariantes ∇ sont en correspondance biunivoque canonique avec les connexions sur le fibré ξ* (si bien qu'on les identifie à celles-ci).

Ainsi, on dispose de *trois* définitions d'une connexion sur un fibré vectoriel différentiable ξ (en tant que champ de sous-espaces horizontaux, en tant que famille d'opérateurs ∇_X et en tant que ∇).

Il existe entre ces définitions les relations suivantes:

$$H = \mathrm{Ann}(\theta^1, \ldots, \theta^n),$$

où $\theta^i = da^i + \omega^i_j a^j = da^i + \Gamma^i_{kj} a^j \, dx^k$;

$$\nabla_X s = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} s^j\right) X^k s_i, \tag{5}$$

où $s = s^i s_i$ et $X = X^k \dfrac{\partial}{\partial x^k}$; et

$$\nabla s = (ds^i + \omega^i_j s^j) \otimes s_j =$$
$$= (ds^i + \Gamma^i_{kj} s^j \, dx^k) \otimes s_j = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} s^j\right) dx^k \otimes s_j,$$

qui ont lieu dans un voisinage de coordonnées trivialisant U quelconque.

Selon le problème, on utilise soit l'une, soit l'autre de ces définitions. Il serait donc bon de pouvoir aisément passer de l une à l'autre.

Problème 2. Montrer que quels que soient les espaces vectoriels $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$, on interprète naturellement chaque élément du produit tensoriel $\mathscr{V}^* \otimes \mathscr{W}$, $\mathscr{V}^*$ étant le dual de $\mathscr{V}$, comme une application linéaire $\mathscr{V} \to \mathscr{W}$. [On a, par

exemple, pour un élément $\theta \otimes c$, $\theta \in \mathcal{V}^*$, $c \in \mathcal{W}$,

$$(\theta \otimes c)(x) = \theta(x)\, c,$$

où $x \in \mathcal{V}$.] En particulier, la valeur $(\nabla s)_b$ en $b \in \mathcal{B}$ de la section $\nabla s \in \Gamma(\tau^*_{\mathcal{B}} \otimes \xi)$ est dans ce cas l'application linéaire $T_b\mathcal{B} \to \mathcal{F}^{\xi}_b$, si bien que pour tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{a}\mathcal{B}$ la formule

$$(\nabla s)(X)_b = (\nabla s)_b (X_b), \quad b \in \mathcal{B},$$

définit une section $(\nabla s)(X)$ (évidemment différentiable) du fibré ξ. Montrer que

$$(\nabla s)(X) = \nabla_X s. \tag{6}$$

Cette formule établit une relation directe (sans recours aux sous-espaces horizontaux ni aux voisinages trivialisants) entre ∇ et ∇_X.

Problème 3. Soient ξ un fibré vectoriel complexe, et $I: \xi_{\mathbf{R}} \to \xi_{\mathbf{R}}$ l'opérateur structure complexe sur $\xi_{\mathbf{R}}$ (voir leçon 6). Soient H une connexion sur le fibré $\xi_{\mathbf{R}}$, et $\nabla_X: \Gamma\xi_{\mathbf{R}} \to \Gamma\xi_{\mathbf{R}}$, $\nabla: \Gamma\xi_{\mathbf{R}} \to \Gamma(\tau^*_{\mathcal{B}} \otimes \xi_{\mathbf{R}})$ les dérivations covariantes correspondantes. Montrer *l'équivalence des conditions suivantes*:

a. *H est une connexion sur ξ* (voir leçon 10).

b. *Pour tout champ de vecteurs X, on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma\xi_{\mathbf{R}} & \xrightarrow{\nabla_X} & \Gamma\xi_{\mathbf{R}} \\
{\scriptstyle I\circ}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle I\circ} \\
\Gamma\xi_{\mathbf{R}} & \xrightarrow{\nabla_X} & \Gamma\xi_{\mathbf{R}}.
\end{array}$$

c. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma\xi & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(\tau^*_{\mathcal{B}} \otimes \xi_{\mathbf{R}}) \\
{\scriptstyle I\circ}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{Id} \otimes I)\circ} \\
\Gamma\xi & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(\tau^*_{\mathcal{B}} \otimes \xi_{\mathbf{R}})
\end{array}$$

est commutatif.

[*Indication.* La condition b équivaut à la linéarité sur $\mathbf{C}$ de l'opérateur ∇_X, et la condition c à celle de ∇.]

* * *

Une théorie plus élaborée des connexions sur les fibrés vectoriels s'inspire des résultats théoriques élémentaires relatifs aux groupes et sous-groupes de Lie. On laisse donc là pour l'instant la géométrie différentielle au profit des groupes de Lie.

Il est connu (voir leçon 1) qu'*un groupe de Lie* (ou *groupe différentiable*) est par définition un groupe $\mathcal{G}$, variété différentiable, muni de la *multiplication*

$$m: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \quad m(a, b) = ab, \quad a, b \in \mathcal{G}, \tag{7}$$

différentiable (auquel cas le *passage à l'inverse*

$$\mathcal{G} \to \mathcal{G}, \; a \mapsto a^{-1}, \quad a \in \mathcal{G},$$

est différentiable lui aussi ; voir problème 4 de la leçon 1).

Problème 4. Montrer que l'application (7) est différentiable si et seulement si elle l'est au point (e, e), avec e l'unité du groupe $\mathcal{G}$.

La propriété de (7) d'être différentiable au point (e, e) signifie, *primo*, que $\mathcal{G}$ admet une carte $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ avec le point e et un voisinage $V \subset U$ de e tels que $ab \in U$ quels que soient les éléments a et b de V, *secundo*, que (7) s'exprime dans cette carte par des fonctions différentiables, i.e. il existe une fonction vectorielle différentiable

$$\mathbf{c} = \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \tag{8}$$

où

$$\mathbf{a} = (a^1, \ldots, a^n), \quad \mathbf{b} = (b^1, \ldots, b^n), \quad \mathbf{c} = (c^1, \ldots, c^n),$$

application d'un ouvert $h(V) \times h(V) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ dans un ouvert $h(U) \subset \mathbb{R}^n$ telle que, si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont les lignes des coordonnées de a et b de V, $\mathbf{c}$ soit la ligne des coordonnées de $c = ab$.

On suppose nécessairement pour fixer les idées que la carte (U, h) est centrée en e, i.e. que

$$h(e) = 0.$$

Puisque $m(a, e) = a$ et $m(e, b) = b$ pour tout a et tout b de $\mathcal{G}$, la fonction vectorielle (8) vérifie les relations $\mathbf{m}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{a}$, $\mathbf{m}(0, \mathbf{b}) = \mathbf{b}$, et elle s'écrit donc

$$\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \ldots,$$

où les points de suspension désignent les termes de degré $\geqslant 2$ de la série vectorielle de Taylor *dont aucun n'est fonction de* $\mathbf{a}$ *seul ou de* $\mathbf{b}$ *seul.* (Afin de simplifier l'exposé, les fonctions sont supposées de classe C^∞. Dans le cas d'une régularité moindre, on remplace la série par le polynôme de Taylor correspondant.)

On note $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ la somme des termes de degré 2 de la série de Taylor de $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Il s'agit (on le sait maintenant) d'une fonction bilinéaire de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, i.e. l'opération $*$ représente une multiplication sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Nous dirons que $*$ est la *partie bilinéaire principale* de la multiplication (7) dans le groupe de Lie $\mathcal{G}$.

Ainsi, on a par définition

$$\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{a} * \mathbf{b} + \ldots, \tag{9}$$

où les points de suspension désignent les termes de degré $\geqslant 3$.

Si a^{-1} est la ligne des coordonnées de a^{-1} (pour a suffisamment proche de e), alors $\mathrm{m}(\mathrm{a}, \mathrm{a}^{-1}) = 0$, donc $\mathrm{a} + \mathrm{a}^{-1} + \mathrm{a} * \mathrm{a}^{-1} + + \ldots = 0$. Ainsi,

$$\mathrm{a}^{-1} = -\mathrm{a} + \mathrm{a} * \mathrm{a} + \ldots, \tag{10}$$

les points de suspension représentant une fois de plus les termes de degré $\geqslant 3$.

* * *

Exemples de groupes de Lie.

Exemple 1. Le groupe linéaire complet GL $(n; \mathbb{R})$ étant un sous-ensemble ouvert de l'espace vectoriel $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ de toutes les matrices carrées d'ordre n est une variété différentiable. Les coordonnées de $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ centrées à l'unité E de ce groupe sont les éléments de la matrice $A - E$. Vu que

$$AB - E = (A - E) + (B - E) + (A - E)(B - E),$$

la fonction (8) s'écrit pour GL $(n; \mathbb{R})$

$$\mathrm{m}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{a} * \mathrm{b},$$

où a, b et a $*$ b sont les matrices $A - E$, $B - E$ et $(A - E)(B - -E)$. La fonction est donc différentiable, et GL $(n; \mathbb{R})$ est bien un groupe de Lie. Un autre groupe de Lie est sa composante de l'unité $\mathrm{GL}^+(n; \mathbb{R})$ formée de matrices à déterminant strictement positif.

Exemple 2. (Cf. remarque 4 de III.16.) Conformément à la définition 1 de III.11, un sous-groupe $\mathcal{G}$ du groupe GL $(n; \mathbb{R})$ est un *groupe de Lie de matrices* s'il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{g} \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ tel que

1° $e^B \in \mathcal{G}$ pour toute matrice $B \in \mathfrak{g}$;

2° si $e^B \in \mathcal{G}$ et $|B| < \ln 2$, alors $B \in \mathfrak{g}$ (ici $|B| = n \times \times \max |b_j^i|$, $B = \| b_j^i \|$).

Ce groupe est une variété différentiable (III.11, prop. 1) admettant les cartes de la forme (CU_0, h_C), où $C \in \mathcal{G}$, U_0 est le voisinage de la matrice unité E dans $\mathcal{G}$, formé de matrices $e^B \in \mathcal{G}$ telles que $|B| < \ln 2$, et h_C est l'application $CU_0 \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ définie par

$$h_C(CA) = \ln A, \quad A \in U_0.$$

Comme la matrice $\ln(A_1A_2)$ est une fonction différentiable des matrices $B_1 = \ln A_1$ et $B_2 = \ln A_2$ pour toute A_1 et toute A_2 de U_0 (le démontrer!), la multiplication (7) est différentiable par rapport à cette structure différentiable.

Ainsi, *tout groupe de Lie de matrices est un groupe de Lie.*

En particulier (voir leçon III.11), les groupes O (n), SO (n), Sp $(m; \mathbb{R})$, O (p, q) ainsi que les groupes U (n), SU (n) et Sp (m) sont des groupes de Lie. Quant aux groupes O $(n; \mathbb{C})$ et Sp $(m; \mathbb{C})$,

ce sont des *groupes de Lie complexes* (variétés $\mathbb{C}$-analytiques et groupes pour lesquels l'application (7) est $\mathbb{C}$-analytique).

Un groupe de Lie $\mathscr{H}$ est un *sous-groupe de Lie* (ou *sous-groupe différentiable*) du groupe de Lie $\mathscr{G}$ si $\mathscr{H}$ est un sous-groupe de $\mathscr{G}$ (i.e. $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$ et $ab^{-1} \in \mathscr{H}$ pour tout a et tout b de $\mathscr{H}$) et une sous-variété (immergée en général) de la variété $\mathscr{G}$. Autrement dit, un groupe de Lie $\mathscr{H}$ est un sous-groupe de Lie si $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$ et si l'injection $\iota : \mathscr{H} \to \mathscr{G}$ est un homomorphisme et une immersion (en chaque point $a \in \mathscr{H}$) à la fois.

Problème 5. On suppose que le sous-groupe $\mathscr{H}$ du groupe de Lie $\mathscr{G}$ est muni d'une structure différentiable par rapport à laquelle $\mathscr{H}$ est un groupe de Lie, et que l'injection $\iota : \mathscr{H} \to \mathscr{G}$ est différentiable en l'unité e de $\mathscr{G}$ et y est une immersion. Montrer que $\mathscr{H}$ est un sous-groupe différentiable du groupe de Lie $\mathscr{G}$. [*Indication.* Tout élément $a \in \mathscr{H}$ vérifie le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H} & \xrightarrow{L_a} & \mathscr{H} \\ \iota \downarrow & & \downarrow \iota \\ \mathscr{G} & \xrightarrow{L_a} & \mathscr{G}, \end{array} \tag{11}$$

où les flèches horizontales L_a sont les difféomorphismes $x \mapsto ax$, avec $x \in \mathscr{H}$ dans la ligne supérieure et $x \in \mathscr{G}$ dans la ligne inférieure.]

Exemple 3 (suite de l'exemple 2). Pour le groupe de Lie de matrices $\mathscr{G}$, l'injection $\mathscr{G} \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ est définie en coordonnées au voisinage de la matrice unité E par l'application $B \to e^B$, la matrice B à éléments les coordonnées de la matrice $A \in \mathscr{G}$ étant égale à $\ln A$. Puisque

$$\left(\frac{\partial e^B}{\partial b^i_j}\right)_0 = \lim_{t\to 0} \frac{e^{tE^i_j} - E}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tE^i_j + O(t^2)}{t} = E^i_j,$$

avec E^i_j l'unité matricielle (matrice qui a tous ses éléments $= 0$, sauf l'élément à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui est égal à 1), l'injection en question est une immersion en E. Aussi, $\mathscr{G}$ est un sous-groupe différentiable du groupe de Lie $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$.

Exemple 4 (qui généralise l'exemple 1). Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{R}$-*algèbre associative* quelconque de dimension finie avec unité e (i.e. c'est un espace vectoriel de dimension finie qui est de même un anneau associatif avec unité e muni de la multiplication homogène (définie par

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

pour tout a et tout b de $\mathcal{A}$ et tout nombre $\lambda \in \mathbb{R}$)). Si a^i, b^i et c^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont les coordonnées de a, b et c dans une base $e_1, \ldots, e_n$ de l'espace vectoriel $\mathcal{A}$, alors

$$c^i = \gamma^i_{jk} a^j b^k, \tag{12}$$

avec γ^i_{jk} des nombres (*constantes de structure* de l'algèbre $\mathcal{A}$ dans la base $e_1, \ldots, e_n$).

Chaque élément $a \in \mathcal{A}$ définit l'opérateur linéaire

$$L_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad x \mapsto ax, \quad x \in \mathcal{A}$$

(représenté dans la base $e_1, \ldots, e_n$ par la matrice $\|\gamma^i_{jk} a^j\|$), et $a \mapsto L_a$ détermine un homomorphisme de l'algèbre $\mathcal{A}$ dans l'algèbre End $\mathcal{A}$ de tous les opérateurs linéaires sur l'espace $\mathcal{A}$, qui est manifestement un monomorphisme (quand $L_a = 0$, on a $a = L_a e = 0$).

En particulier, un élément $a \in \mathcal{A}$ est inversible (i.e. il existe $a^{-1} \in \mathcal{A}$ tel que $a^{-1}a = aa^{-1} = e$) si et seulement si l'opérateur L_a est inversible (non dégénéré). Aussi, l'ensemble $\mathcal{A}^\circ$ de tous les éléments inversibles de $\mathcal{A}$ (qui constitue évidemment un groupe pour la multiplication) est ouvert dans $\mathcal{A}$, i.e. c'est donc une variété différentiable. Comme les coordonnées de $a \in \mathcal{A}$ centrées en e sont les coordonnées dans la base $e_1, \ldots, e_n$ de l'élément $a - e$ et vu que

$$ab - e = (a - e) + (b - e) + (a - e)(b - e), \tag{13}$$

le groupe $\mathcal{A}^\circ$ est un groupe de Lie.

Lorsque $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, on retrouve le groupe GL $(n; \mathbb{R})$.

Les coordonnées $a^1, \ldots, a^n$ de $a \in \mathcal{A}^\circ$ étant les coordonnées linéaires de $a - e$, on identifie la ligne a des $a^1, \ldots, a^n$ à $a - e$, et la partie bilinéaire principale de la multiplication dans $\mathcal{A}^\circ$ s'exprime par

$$a * b = ab - a - b.$$

Cette opération très importante en théorie des algèbres s'appelle *multiplication de Jacobson.*

On note que dans le cas de $\mathcal{A}^\circ$, la formule (9) ne contient pas de termes de degré 1 (qui figurent par contre dans la formule (10)!).

* * *

L'application (11) est un difféomorphisme pour tout élément a d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ arbitraire, si bien qu'on définit pour tout champ vectoriel X sur $\mathcal{G}$ le champ de vecteurs

$$L_a^* X : b \mapsto (\mathrm{d}L_a)_b^{-1} X_{ab}, \quad b \in \mathcal{G}$$

(voir formule (9) de III.17).

Définition 2. Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{a}\mathcal{G}$ est dit *invariant à gauche* si

$$L_a^* X = X \text{ pour tout } a \in \mathcal{G},$$

i.e. si

$$X_{ab} = (\mathrm{d}L_a)_b X_b \text{ quels que soient } a \text{ et } b \text{ de } \mathcal{G}. \tag{14}$$

Il est clair que l'ensemble $\mathfrak{g}$ de tous les champs vectoriels invariants à gauche sur $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de l'algèbre de Lie

$\mathfrak{a}\mathcal{G}$ des champs vectoriels sur $\mathcal{G}$. Comme

$$L_a^* [X, Y] = [L_a^* X, L_a^* Y]$$

pour n'importe quels champs X et Y sur $\mathcal{G}$ (voir remarque 1 de III.17), ce sous-espace est de plus une sous-algèbre de $\mathfrak{a}\mathcal{G}$, donc une algèbre de Lie.

Définition 3. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ s'appelle *algèbre de Lie* du groupe de Lie $\mathcal{G}$.

Cette algèbre sera également notée $\mathfrak{l}(\mathcal{G})$ (ou $\mathfrak{l}\mathcal{G}$).

Exemple 5. Pour toute algèbre associative $\mathcal{A}$, le groupe de Lie $\mathcal{A}^\circ$ constitue une sous-variété ouverte de l'espace vectoriel $\mathcal{A}$, si bien que l'espace tangent $\mathbf{T}_a\mathcal{A}$ à $\mathcal{A}^\circ$ en un point $a \in \mathcal{A}^\circ$ quelconque s'identifie naturellement à $\mathcal{A}$, et si $x^1, \ldots, x^n$ sont les coordonnées suivant la base $e_1, \ldots, e_n$ dans $\mathcal{A}$, il correspond alors à la base $\mathcal{A}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_a$$

de $\mathbf{T}_a\mathcal{A}$ la base $e_1, \ldots, e_n$. Ainsi, chaque champ de vecteurs X sur $\mathcal{A}^\circ$ est interprété comme application

$$X : \mathcal{A}^\circ \to \mathcal{A}. \tag{15}$$

En coordonnées $x^1, \ldots, x^n$, l'application $L_a : \mathcal{A}^\circ \to \mathcal{A}^\circ$, $x \mapsto ax$, $a \in \mathcal{A}^\circ$, s'écrit

$$y^i = \gamma^i_{jk} a^j x^k.$$

Puisque

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^k} = \gamma^i_{jk} a^j,$$

$(\mathrm{d}L_a)_b : \mathbf{T}_b\mathcal{A}^\circ \to \mathbf{T}_{ab}\mathcal{A}^\circ$, assimilée à $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ par suite des identifications $\mathbf{T}_b\mathcal{A}^\circ = \mathcal{A}$ et $\mathbf{T}_{ab}\mathcal{A}^\circ = \mathcal{A}$, coïncide avec l'application L_a (la partie linéaire principale d'une fonction linéaire est cette fonction elle-même). Ainsi, la condition (14) qui fait du champ (15) un champ invariant à gauche, s'écrit

$$X \circ L_a = L_a \circ X,$$

i.e.

$$X(ab) = aX(b), \quad a, b \in \mathcal{A}^\circ. \tag{16}$$

On pose $c = X(e)$, il vient

$$X(a) = ac, \quad c \in \mathcal{A}. \tag{17}$$

Puisque toute application de la forme (17) vérifie manifestement la relation (16), on dit que *les champs vectoriels invariants à gauche sur le groupe de Lie $\mathcal{A}^\circ$ sont en correspondance biunivoque canonique avec*

les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}$. Il correspond à $c \in \mathcal{A}$ un champ X tel que

(18) $$X_a = (ac)^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a$$

en tout point $a \in \mathcal{A}^\circ$, $(ac)^i$ étant les coordonnées de l'élément ac.

La formule (18) signifie que, dans la carte $(\mathcal{A}^\circ, x^1, \ldots, x^n)$, les composantes X^i de X sont définies par

$$X^i = (xc)^i = \gamma^i_{jk} x^j c^k,$$

d'où

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j} = \gamma^i_{jk} c^k.$$

Si Y est donc un autre champ vectoriel invariant à gauche sur $\mathcal{G}$ et s'il est associé à un élément $d \in \mathcal{A}$, alors (voir formule (24) de III.16) on a pour les composantes $[X, Y]^i$ du champ $[X, Y]$:

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} = \gamma^j_{lk} x^l c^k \gamma^i_{js} d^s - \gamma^j_{lk} x^l d^k \gamma^i_{js} c^s =$$

$$= \gamma^i_{js} (xc)^j d^s - \gamma^i_{js} (xd)^j c^s = (xcd)^i - (xdc)^i = (x[c, d])^i,$$

avec $[c, d] = cd - dc$. Il correspond donc au champ $[X, Y]$ l'élément $[c, d]$.

L'espace vectoriel $\mathcal{A}$ est une algèbre de Lie pour l'opération $c, d \mapsto [c, d]$ (le vérifier!). On l'appelle *algèbre de Lie des commutateurs* de l'algèbre associative $\mathcal{A}$ et on la note $[\mathcal{A}]$.

L'affirmation démontrée s'énonce en ces termes: *l'algèbre de Lie* $\mathfrak{l}(\mathcal{A}^\circ)$ *du groupe de Lie* $\mathcal{A}^\circ$ *s'identifie naturellement à l'algèbre de Lie* $[\mathcal{A}]$:

$$\mathfrak{l}(\mathcal{A}^\circ) = [\mathcal{A}].$$

En particulier, $\mathfrak{l}(\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})) = [\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})]$.

Cela explique l'emploi du symbole $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ (ou $\mathfrak{gl}(n)$ tout court) pour l'algèbre de Lie $[\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})]$ (cf. leçon III.11).

[Dans III.11, on a introduit les algèbres de Lie (pour les groupes de matrices seulement!) d'une autre manière. S'agissant de GL $(n; \mathbb{R})$, les deux façons d'agir conduisent au même résultat. On montrera plus loin que c'est également le cas des groupes de Lie de matrices arbitraires.]

* * *

Soient $\mathcal{G}$ un groupe de Lie quelconque, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, et $\mathrm{T}_e\mathcal{G}$ l'espace tangent à $\mathcal{G}$ au point $e \in \mathcal{G}$. Soit l'application

(19) $$\mathfrak{g} \to \mathrm{T}_e\mathcal{G}, \quad X \mapsto X_e$$

qui associe à chaque champ de vecteurs $X \in \mathfrak{g}$ sa valeur X_e en e. Elle est évidemment linéaire.

Proposition 2. *L'application* (19) *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit A un vecteur quelconque de $T_e\mathcal{G}$. On pose pour chaque point $a \in \mathcal{G}$:

$$X_a = (dL_a)_e A.$$

On aura l'affirmation voulue si l'on démontre que

a. L'application $a \mapsto X_a$ est différentiable, si bien que (puisque $X_a \in T_a\mathcal{G}$) c'est un champ vectoriel sur $\mathcal{G}$.

b. Ce champ est invariant à gauche (est dans $\mathfrak{g}$).

c. L'application

$$(20) \qquad T_e\mathcal{G} \to \mathfrak{g}, \quad A \mapsto X,$$

est l'inverse de (19).

Il suffit de signaler, pour avoir c, que, premièrement, on a $X_e = A$ par construction, et, deuxièmement,

$$X_a = (dL_a)_e X_e$$

pour tout champ vectoriel invariant à gauche X.

L'affirmation b n'est pas difficile à vérifer elle non plus. Comme $L_a \circ L_b = L_{ab}$, donc $(dL_a)_b \circ (dL_b)_e = (dL_{ab})_e$, on a

$$(dL_a)_b X_b = (dL_a)_b\,((dL_b)_e A) = (dL_{ab})_e A = X_{ab}.$$

Afin d'avoir a, on trouve les composantes de X_a exprimées en coordonnées locales.

Soient U et V les voisinages de coordonnées considérés ci-dessus tels que la multiplication dans $\mathcal{G}$ soit exprimée par la fonction vectorielle (8). Quand $a \in V$, l'application L_a sur V est définie par la fonction $\mathbf{b} \mapsto \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, donc $(dL_a)_e$ par

$$(dL_a)_e \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_e = \left(\frac{\partial m^i}{\partial b^j}\right)_0 \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

$m^i = m^i(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ étant les composantes de $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Par conséquent, on a pour les composantes X^i du champ X sur V:

$$(21) \qquad X^i = \left(\frac{\partial m^i}{\partial b^j}\right)_0 A^j,$$

avec A^j les composantes de A dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_e$, $i = 1, \ldots, n$, si bien que X^i sont des fonctions différentiables de a. Ainsi, *le champ X est différentiable sur le voisinage V.*

D'autre part, l'ensemble $gV = L_g V$ est ouvert et le couple $(gV, h \circ L_g^{-1})$ est une carte quel que soit $g \in \mathcal{G}$. Si X^i sont de plus les composantes de X dans la carte (V, h), alors la propriété d'invariance à gauche fait que $X^i \circ L_g$ sont celles de X dans la carte $(gV, h \circ L_g^{-1})$. Aussi, le champ X est de même différentiable sur tout

ensemble gV. On note que les ensembles de la forme gV, $g \in \mathcal{G}$, recouvrent le groupe $\mathcal{G}$ tout entier, ce qui achève la démonstration. □

Dans le cas des groupes de Lie de la forme $\mathcal{A}^{\circ}$, la proposition 2 découle encore des résultats de l'exemple 5.

Corollaire 1. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(\mathcal{G})$ *est de dimension finie, et sa dimension est égale à la dimension* n *du groupe* $\mathcal{G}$.

On applique le crochet de Lie à l'espace vectoriel $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$. On pose pour tout A et tout B de $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$:

$$[A, B] = [X, Y]_e, \tag{22}$$

X et Y étant des champs vectoriels invariants à gauche sur $\mathcal{G}$ tels que $X_e = A$ et $Y_e = B$.

Dans cette hypothèse, l'espace $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie canoniquement isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On identifiera de règle ces deux algèbres.

* * *

Chose remarquable, on trouve pour le produit (22) des vecteurs A, $B \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}$ une formule explicite simple qui l'exprime par la multiplication (7) dans le groupe de Lie $\mathcal{G}$ ou, plus précisément, par sa partie bilinéaire principale $\mathbf{a} * \mathbf{b}$.

L'opération $*$ dans $\mathbb{R}^n$ est construite par définition à l'aide d'une carte $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ centrée en e. C'est cette carte qui détermine également la base

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_e, \ \ldots, \ \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_e \tag{23}$$

de l'espace $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$, i.e. l'isomorphisme de coordonnées $\mathbf{T}_e\mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$ (qui n'est autre, par suite de $\mathbf{T}_0\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, que la différentielle $(dh)_e$ en e de l'application de coordonnées $h: U \to \mathbb{R}^n$). On transporte par l'isomorphisme $(dh)_e$ l'opération $*$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$, i.e. on accepte pour $A * B$, avec A, $B \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}$ quelconques, un vecteur dont les coordonnées dans la base (23) forment la ligne $\mathbf{a} * \mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ étant les lignes des composantes des vecteurs A et B respectivement.

Il y a lieu de noter que l'opération $*$ dans $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$ dépend du choix de la carte (U, h).

Il se trouve que l'opération (22) s'exprime aisément par l'opération $*$ dans $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$.

Proposition 3. *On a pour tout vecteur* A *et tout vecteur* B *de* $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$

$$[A, B] = A * B - B * A. \tag{24}$$

D é m o n s t r a t i o n. Par définition, $[A, B] = [X, Y]_e$, où X et Y sont des champs vectoriels invariants à gauche tels que $X_e = A$ et $Y_e = B$. Ce faisant, dans la carte $(U, x^1, \ldots, x^n)$ quelconque les composantes X^i et Y^i des champs X et Y sont définies

selon (21) par les formules

$$X^i = \left(\frac{\partial m^i}{\partial h^j}\right)_0 A^j, \quad Y^i = \left(\frac{\partial m^i}{\partial b^j}\right)_0 B^j,$$

où $\left(\frac{\partial m^i}{\partial b^j}\right)_0$ sont les valeurs que les dérivées partielles des composantes m^i (a, b) de m (a, b) par rapport aux composantes b^i du vecteur **b** prennent au point (0, 0). Par conséquent (voir formule (22) de III.16), on a pour les composantes $[X, Y]^i_e = [A, B]^i$ du vecteur $[A, B]$:

$$[A, B]^i = \left(\frac{\partial m^j}{\partial b^k}\right)_0 A^k \left(\frac{\partial^2 m^i}{\partial a^j \partial b^l}\right)_0 B^l - \left(\frac{\partial m^j}{\partial b^k}\right)_0 B^k \left(\frac{\partial^2 m^i}{\partial a^j \partial b^l}\right)_0 A^l =$$
$$= (A^k B^l - B^k A^l)\left(\frac{\partial m^j}{\partial b^k}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 m^i}{\partial a^j \partial b^l}\right)_0.$$

Mais on a conformément à (9)

$$m^i(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^i + b^i + \gamma^i_{kl} a^k b^l + \ldots,$$

$\gamma^i_{kl} a^k b^l$ étant les composantes du vecteur **a** * **b**. Donc,

$$\frac{\partial m^i}{\partial b^l} = \delta^i_l + \gamma^i_{kl} a^k + \ldots, \quad \frac{\partial^2 m^i}{\partial a^k \partial b^l} = \gamma^i_{kl} + \ldots,$$

et

$$\left(\frac{\partial m^i}{\partial b^l}\right)_0 = \delta^i_l, \quad \frac{\partial^2 m^i}{\partial a^k \partial b^l} = \gamma^i_{kl}.$$

Ainsi,

$$[A, B]^i = (A^k B^l - B^k A^l)\,\delta^j_k \gamma^i_{jl} = \gamma^i_{kl} A^k B^l - \gamma^i_{kl} B^k A^l = (A * B)^i - (B * A)^i,$$

ce qui prouve la formule (24). □

Remarque 1. L'opération * s'écrit de façon unique comme somme

$$A * B = A \underset{1}{*} B + A \underset{2}{*} B,$$

$\underset{1}{*}$ étant commutative et $\underset{2}{*}$ anticommutative. La proposition 3 signifie que $\underset{2}{*}$ est exprimée par le crochet de Lie

$$A \underset{2}{*} B = \frac{1}{2}[\mathrm{A}, \mathrm{B}],$$

si bien que cette opération ne dépend pas du choix de (U, h). [Il y a plus. On montrera plus loin qu'on choisit une carte (U, h) telle que la partie commutative $A \underset{1}{*} B$ du produit $A * B$ soit identiquement nulle.]

Problème 6. Etablir la variation de l'opération * avec le changement de carte (U, h) et vérifier en particulier que la partie anticommutative de * reste dans ce cas invariante.

LEÇON 14

Sous-groupes à un paramètre. — Application exponentielle et coordonnées normales. — Groupe de Lie muni d'une multiplication exprimée par la multiplication dans son algèbre de Lie. — Différentielle de la représentation adjointe. — Opérations dans l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie et sous-groupes à un paramètre. — Sous-groupes de Lie d'un groupe de Lie. — Distributions et leurs sous-variétés intégrales. — Théorème de Frobenius. — Sous-variétés des variétés vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité. — Unicité de la structure d'un sous-groupe de Lie.

Définition 1. Une courbe différentiable

$$\beta : \mathbb{R} \to \mathcal{G}$$

définie sur tout l'axe $\mathbb{R}$ s'appelle *sous-groupe à un paramètre* d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ si elle est un homomorphisme de groupes, i.e. si

$$\beta(s+t) = \beta(s)\beta(t)$$

est juste pour tout s et tout t de $\mathbb{R}$.

Manifestement $\beta(0) = e$.

Un sous-groupe à un paramètre est (soulignons ce fait) une application et non un ensemble.

Problème 1. Montrer que tout homomorphisme $\beta: \mathbb{R} \to \mathcal{G}$ est une application différentiable (i.e. un sous-groupe à un paramètre). [*Indication.* Ecrire β en coordonnées locales et démontrer sa différentiabilité au point 0.]

Exemple 1. L'application constante

$$\mathrm{const}_e : t \mapsto e, \quad t \in \mathbb{R},$$

est un sous-groupe à un paramètre.

Exemple 2. Soient $\mathcal{G}$ le groupe de Lie de matrices, et $\mathfrak{g}$ un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (voir définition 1 de III.11 et exemple 2 de la leçon 13). Quelle que soit la matrice $B \in \mathfrak{g}$, l'application

$$\beta : t \mapsto e^{tB}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

est évidemment un sous-groupe à un paramètre de $\mathcal{G}$.

Problème 2. Montrer que tout sous-groupe à un paramètre du groupe de Lie de matrices $\mathcal{G}$ est de la forme (1).

Problème 3. Montrer que

1° pour tout élément b de l'algèbre associative $\mathcal{A}$ de dimension finie, la série

$$e^b = e + b + \frac{b^2}{2!} + \dots + \frac{b^n}{n!} + \dots$$

converge;

2° l'application

(2) $$\beta : t \mapsto e^{tb}, \quad b \in \mathcal{A},$$

est un sous-groupe à un paramètre du groupe de Lie $\mathcal{A}^\circ$;

3° chaque sous-groupe à un paramètre de $\mathcal{A}^\circ$ s'écrit sous la forme (2).

Il se trouve qu'on décrit de façon analogue les sous-groupes à un paramètre de tout groupe de Lie $\mathcal{G}$. Faute de place, nous le ferons dans plusieurs problèmes.

Problème 4. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une application différentiable arbitraire de variétés différentiables. Montrer que *pour toute courbe* $\gamma : I \to \mathcal{X}$, *on a en chaque point* $t \in I$

(3) $$(f \circ \gamma)^\cdot (t) = (\mathrm{d}f)_{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t).$$

[*Indication*. Si f est donnée en coordonnées locales par la fonction vectorielle $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ et γ par $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, alors

$$(f \circ \gamma)^\cdot (t) = \frac{\mathrm{d}y^j(\mathbf{x}(t))}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{(f\circ\gamma)(t)} =$$

$$= \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{f(\gamma(t))} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} (\mathrm{d}f)_{\gamma(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(t)} =$$

$$= (\mathrm{d}f)_{\gamma(t)} \left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(t)}\right) = (\mathrm{d}f)_{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t)$$

pour chaque $t \in I$.]

Problème 5. Montrer que *chaque sous-groupe à un paramètre* β *d'un groupe de Lie* $\mathcal{G}$ *est une courbe intégrale* (*évidemment maximale*) *d'un champ vectoriel invariant à gauche* $X \in \mathcal{G}$, *i.e.*

$$\dot{\beta}(t) = X_{\beta(t)} \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

[*Indication*. Le champ X est caractérisé par la condition $\mathcal{X}_e = \dot{\beta}(0)$. On applique (2) à $L_a : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ et à la courbe β, il vient

$$X_a = (\mathrm{d}L_a)_e X_e = (\mathrm{d}L_a)_e \dot{\beta}(0) = (L_a \circ \beta)^\cdot (0)$$

pour tout point $a \in \mathcal{G}$. D'autre part, si $a = \beta(t)$, alors $L_a \circ \beta : s \mapsto \beta(s + t)$, donc $(L_a \circ \beta)^\cdot (0) = \dot{\beta}(t)$.]

Problème 6. Montrer que *chaque groupe de Lie* $\mathcal{G}$ *est une variété séparée*. [*Indication*. La diagonale Δ du produit $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ est l'image réciproque de l'unité e de $\mathcal{G}$ par l'application continue $(a, b) \mapsto ab^{-1}$.]

Aussi, il existe pour tout champ vectoriel X sur $\mathcal{G}$ et tout $a \in \mathcal{G}$ (voir théorème 1 de III.17) une courbe intégrale maximale unique $\beta_a : I_a \to \mathcal{G}$ de X qui passe pour $t = 0$ par le point a. Soit $I = I_e$ et $\beta = \beta_e$.

Problème 7. Montrer que *si X est invariant à gauche, alors* $\beta_a = L_a \circ \beta$. [*Indication.* Comme

$$(L_a \circ \beta)^{\cdot}(t) = (\mathrm{d}L_a)_{\beta(t)}\dot{\beta}(t) = (\mathrm{d}L_a)_{\beta(t)} X_{\beta(t)} = X_{a\beta(t)} = X_{(L_a \circ \beta)(t)},$$

$L_a \circ \beta$ est une courbe intégrale (évidemment maximale) de X qui passe pour $t = 0$ par le point a.]

Problème 8. Démontrer que si s, t, $s + t \in I$, alors

$$\beta(s + t) = \beta(s)\,\beta(t). \tag{4}$$

[*Indication.* Les deux courbes $t \mapsto \beta(s+t)$ et $t \mapsto \beta(s)\,\beta(t)$ sont des courbes intégrales du champ invariant à gauche X, qui passent pour $t = 0$ par $\beta(s)$.]

Problème 9. Il existe pour tout nombre $t \in \mathfrak{R}$ un entier $n > 0$ tel que $t/n \in I$. Montrer que *la formule*

$$\gamma(t) = \beta\left(\frac{t}{n}\right)^n \tag{5}$$

définit bien une courbe différentiable $\gamma : \mathfrak{R} \to \mathcal{G}$, *sous-groupe à un paramètre.* [*Indication.* Si $\frac{t}{n} \in I$ et $\frac{t}{m} \in I$, alors $\frac{t}{nm} \in I$, si bien que

$$\beta\left(\frac{t}{n}\right) = \beta\left(\frac{t}{mn}\right)^m \quad \text{et} \quad \beta\left(\frac{t}{m}\right) = \beta\left(\frac{t}{mn}\right)^n$$

en vertu de (4). Ainsi, (5) est licite. Si de plus $\frac{t_0}{n_0} \in I$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{t}{n_0} \in I$ pour tout t, $|t - t_0| < \varepsilon$, i.e. la courbe est différentiable.]

Problème 10. Montrer que *la courbe* (5) *est une courbe intégrale* (*manifestement maximale*) *de X invariant à gauche.* [*Indication.* La courbe (5) étant un sous-groupe à un paramètre, la courbe $L_a \circ \gamma : s \mapsto a\gamma(s)$ coïncide pour tout point $a = \gamma(t)$ avec la courbe $s \mapsto \gamma(s + t)$, si bien que

$$\dot{\gamma}(t) = (L_a \circ \gamma)^{\cdot}(0) = (\mathrm{d}L_a)_e\dot{\gamma}(0) =$$
$$= (\mathrm{d}L_a)_e\dot{\gamma}(0) = (\mathrm{d}L_a)_e X_e = X_a = X_{\gamma(t)}$$

quel que soit $t \in \mathfrak{R}$.]

Comme $\gamma(0) = e$, cela prouve que $\gamma = \beta$ (et, en particulier que $I = \mathfrak{R}$).

Finalement, on a la

Proposition 1. *Les sous-groupes à un paramètre d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ sont exactement les courbes intégrales maximales des champs vectoriels invariants à gauche sur $\mathcal{G}$, qui passent pour $t = 0$ par le point e.* □

Corollaire 1. *Pour tout vecteur $A \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}$, il existe un seul sous-groupe à un paramètre β tel que*

$$\dot{\beta}(0) = A. \ \square$$

Ainsi, les sous-groupes à un paramètre d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ sont en correspondance biunivoque canonique avec les éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(\mathcal{G})$.

Nous noterons β_X ou β_A ($A = X_e$) le sous-groupe à un paramètre associé à l'élément $X \in \mathfrak{g}$. Ainsi, on a par définition

$$\dot{\beta}_A(0) = A$$

pour tout vecteur A de $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$.

* * *

Définition 2. Une application

$$\exp : \mathbf{T}_e\mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

définie par la formule

$$\exp A = \beta_A(1), \quad A \in \mathbf{T}_e\mathcal{G},$$

est dite *exponentielle*.

Le vecteur tangent en 0 à la courbe $t \mapsto \beta_A(\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, est évidemment le vecteur $\lambda\dot{\beta}_A(0) = \lambda A$, et la courbe est un sous-groupe à un paramètre. Par conséquent,

$$\beta_A(\lambda t) = \beta_{\lambda A}(t) \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Il en résulte pour $t = 1$ l'égalité $\beta_A(\lambda) = \beta_{\lambda A}(1)$, i.e. (après la substitution $\lambda = t$)

$$\beta_A(t) = \exp tA. \tag{7}$$

Cela signifie en termes de l'exemple 2 que l'application exp étend l'application matricielle $A \mapsto e^A$ à tout groupe de Lie $\mathcal{G}$. Cela explique le nom qu'on lui donne.

Selon (7), on a $\beta_A(-1) = \exp(-A)$ et $\beta_A(-1)\beta_A(1) = \beta_A(0) = e$, si bien que $\exp(-A) = \beta_A(1)^{-1}$, i.e.

$$\exp(-A) = (\exp A)^{-1}, \quad A \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}. \tag{8}$$

Afin de simplifier les formules, on écrira $\exp A^{-1}$ au lieu de $(\exp A)^{-1}$.

Il est bien connu (voir leçon III.17) que chaque champ vectoriel X définit un flux maximal $\{\varphi_t\}$ tel que $\varphi_t(a) = \beta_a(t)$, avec β_a la courbe intégrale maximale de X, qui passe pour $t = 0$ par le point a. Puisque les courbes β_a sont définies pour X invariant à gauche sur l'axe $\mathbb{R}$ tout entier, pour chaque X sur $\mathcal{G}$ le flux $\{\varphi_t\}$ est composé de difféomorphismes $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ (on dit qu'il est *total*). On a $\beta_a(t) =$

$= a\beta_X(t)$, et ces difféomorphismes sont donc définis par

$$\varphi_t(a) = a\cdot\exp tA, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathcal{G},$$

où $A = X_e$, i.e. il s'agit des difféomorphismes $R_{\exp tA}$.

Comme $\beta_A(0) = e$ et $\dot\beta_A(0) = A$, dans une carte $(U, x^1, \ldots, x^n)$ arbitraire centrée en e, la courbe β_A est définie par la fonction vectorielle $\mathbf{x}(t)$ de la forme

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{c}_2(\mathbf{a})\,t^2 + \ldots + \mathbf{c}_m(\mathbf{a})t^m + \ldots,$$

où $\mathbf{a}$ est la ligne des coordonnées du vecteur A dans la base

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)$$

de $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$ et où $\mathbf{c}_2(\mathbf{a}), \ldots, \mathbf{c}_m(\mathbf{a}), \ldots$ sont des fonctions vectorielles de $\mathbf{a}$ (ce sont des fonctions différentiables en vertu du théorème qui énonce la dépendance différentiable des solutions des équations différentielles vis-à-vis des données initiales). Ce faisant, si $|\lambda|$ est suffisamment petit (pour que U contienne un point de coordonnées $x^i(\lambda t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$), on a identiquement en t par la formule (6):

$$(\lambda\mathbf{a})\,t + \mathbf{c}_2(\lambda\mathbf{a})\,t^2 + \ldots + \mathbf{c}_m(\lambda\mathbf{a})\,t^m + \ldots =$$
$$= \mathbf{a}(\lambda t) + \mathbf{c}_2(\mathbf{a})(\lambda t)^2 + \ldots + \mathbf{c}_m(\mathbf{a})(\lambda t)^m + \ldots$$

D'où

$$\mathbf{c}_2(\lambda\mathbf{a}) = \lambda^2\mathbf{c}_2(\mathbf{a}), \ldots, \mathbf{c}_m(\lambda\mathbf{a}) = \lambda^m\mathbf{c}_m(\mathbf{a}),$$

i.e. *quel que soit* $m \geqslant 2$, $\mathbf{c}_m(\mathbf{a})$ *est une fonction homogène de degré* m *de* $\mathbf{a}$.

Problème 11. Montrer que les fonctions $\mathbf{c}_m(\mathbf{a})$ sont des polynômes en a (i.e. que toutes leurs composantes sont des polynômes à n indéterminées $a^1, \ldots, a^n$).

Puisque

$$\lambda^m \frac{\partial \mathbf{c}_m(\mathbf{a})}{\partial a^i} = \frac{\partial[\lambda^m \mathbf{c}_m(\mathbf{a})]}{\partial a^i} = \lambda\frac{\partial \mathbf{c}_m}{\partial a^i}(\lambda\mathbf{a}),$$

toutes les dérivées partielles d'ordre 1 de chaque $\mathbf{c}_m$ sont des fonctions homogènes de degré $m - 1 \geqslant 1$, si bien que leurs valeurs au point 0 sont nulles:

(9) $$\left(\frac{\partial \mathbf{c}_m}{\partial a^i}\right)_0 = 0 \text{ pour tout } m \geqslant 2 \text{ et tout } i = 1, \ldots, n.$$

D'autre part, si le vecteur $\mathbf{a}$ est suffisamment petit (pour qu'il existe dans U un point de coordonnées $x^i(1)$), le point $\exp A$ appartient au voisinage U, et ses coordonnées x^i sont données selon (8) par

(10) $$x^i = a^i + c_2^i(\mathbf{a}) + \ldots + c_m^i(\mathbf{a}) + \ldots,$$

avec a^i, c_2^i (a), . . ., c_m^i (a), . . . les coordonnées des vecteurs a, c_2 (a), . . ., c_m (a). On a donc par définition que *dans un voisinage du point* $0 \in T_e\mathcal{G}$ *l'application* exp *s'écrit en coordonnées par les fonctions* (10).

Comme les valeurs des dérivées partielles de (10) au point 0 sont données en vertu de (9) par

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial a^i}\right)_0 = \delta_j^i,$$

i.e. elles forment la matrice unité E, il en résulte que la différentielle d $\exp_0$ en $0 \in T_e\mathcal{G}$ de l'application exp, qu'on considère comme application

$$d\,\exp_0 : T_e\mathcal{G} \to T_e\mathcal{G}$$

par suite de l'identification $T_0(T_e\mathcal{G}) = T_e\mathcal{G}$, *est l'identité.*

Aussi

$$\exp : T_e\mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

est étale au point 0, i.e. c'est un difféomorphisme du voisinage du point 0 de l'algèbre de Lie $T_e\mathcal{G} = \mathfrak{g}$ sur le voisinage du point e du groupe de Lie $\mathcal{G}$.

Ces voisinages s'appellent *voisinages normaux* (de 0 et e respectivement). [D'ailleurs, on exige d'ordinaire que les voisinages normaux $U^{(0)}$ de $T_e\mathcal{G}$ soient *étoilés* (i.e. si $A \in U^{(0)}$, alors $\lambda A \in U^{(0)}$ pour tout λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$).]

Pour tout voisinage normal U du point e dans le groupe $\mathcal{G}$, le composé h de l'application $\exp^{-1}: U \to T_e\mathcal{G}$ et d'un isomorphisme de coordonnées $T_e\mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$ quelconque est un difféomorphisme de U sur l'ensemble ouvert $h(U) \subset \mathbb{R}^n$. Cela signifie par définition que *le couple* (U, h) *est la carte en e du groupe de Lie* $\mathcal{G}$.

Ces cartes sont dites *normales*, et les coordonnées locales correspondantes sont *normales* elles aussi. (On leur donne aussi le nom de *coordonnées canoniques de première espèce.*)

Les coordonnées normales sont évidemment caractérisées par le fait que les sous-groupes à un paramètre sont donnés en ces coordonnées par des fonctions linéaires.

Problème 12. Démontrer qu'*un groupe topologique connexe est engendré par tout voisinage U de l'unité.* [*Indication.* L'ensemble formé de tous les produits possibles d'éléments de U est ouvert et fermé à la fois.]

En particulier, si un groupe de Lie $\mathcal{G}$ est connexe, il est engendré par tout voisinage normal U de l'unité. Vu que $U \subset \exp \mathfrak{g}$, on en déduit que *chaque groupe de Lie* $\mathcal{G}$ *connexe est engendré par l'ensemble* $\exp \mathfrak{g}$. (En général, $\exp \mathfrak{g} \neq \mathcal{G}$.)

Problème 13. Définir l'ensemble $\exp \mathfrak{g}$ pour les algèbres de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ et $\mathfrak{so}(n)$ et vérifier que ce sont justement ces ensembles qui engendrent les groupes $GL^+(e; \mathbb{R})$ et $SO(n)$ (ceci étant, $\exp \mathfrak{so}(n) = SO(n)$).

* * *

Un voisinage normal U_0 quelconque du point $0 \in \mathrm{T}_e\mathcal{G}$ contient (le démontrer!) un voisinage V_0 tel que, quels que soient les vecteurs A, $B \in V_0$, le point $\exp A \cdot \exp B$ appartienne au voisinage $U = \exp U_0$ de $e \in \mathcal{G}$. Ce point s'écrit donc $\exp C$, avec $C \in U_0$. On pose

$$C = m(A, B). \tag{11}$$

Ainsi, on a par définition

$$\exp A \cdot \exp B = \exp m(A, B)$$

pour n'importe quels vecteurs A et B de V_0.

L'image $\mathbf{a}$ de A par un isomorphisme de coordonnées $\mathrm{T}_e\mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$ quelconque n'est autre que le vecteur coordonnées normales du point $a = \exp A$ dans la carte normale (U, h) correspondante. Aussi, le vecteur fonction $\mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ qui est dans cette carte la multiplication dans le groupe $\mathcal{G}$ (voir formule (8) de la leçon 13), exprime en coordonnées l'opération (11). Par conséquent,

$$m(A, B) = A + B + A * B + \ldots,$$

l'opération $*$ étant transportée de la leçon 13 (formule (9)) dans $\mathrm{T}_e\mathcal{G}$ par l'isomorphisme $(dh)_e \colon \mathrm{T}_e\mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$ (il s'agit en fait de $*$ de la proposition 3 de ladite leçon, qui est construite à l'aide de la carte normale (U, h)).

Il est connu (voir formule (10) de la leçon 13) que pour toute carte (U, h) centrée en e, le vecteur $\mathbf{a}^{-1}$ coordonnées du point a^{-1} est donné par

$$\mathbf{a}^{-1} = -\mathbf{a} + \mathbf{a} * \mathbf{a} + \ldots$$

D'autre part, si (U, h) est normale, alors $\mathbf{a}^{-1} = -\mathbf{a}$ conformément à (8), ce qui prouve que $\mathbf{a} * \mathbf{a} = 0$, i.e. que *l'opération $*$ construite moyennant les coordonnées normales est anticommutative* (dans $\mathbb{R}^n$ et, partant, dans $\mathrm{T}_e\mathcal{G}$), si bien qu'elle s'exprime (voir remarque 1 de la leçon 13) par la multiplication dans l'algèbre de Lie :

$$A * B = \frac{1}{2}[A, B].$$

On a le

Théorème 1. *Pour tout vecteur A et tout vecteur B de $\mathrm{T}_e\mathcal{G}$, contenus dans un voisinage du vecteur nul, on a la formule*

$$\exp A \cdot \exp B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \ldots\right), \tag{12}$$

où les points de suspension désignent les termes de degré $\geqslant 3$. □

Conformément à ce théorème, la multiplication dans un groupe de Lie $\mathcal{G}$ au voisinage du point e est univoquement reconstituée (au moins à des termes de degré $\geqslant 3$ près) à partir de la multiplication dans son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Remarque 1. Il s'agit en fait d'une *reconstitution complète* (les termes de tout degré de (12) s'expriment par $[\,,\,]$), mais la démonstration nous entraînerait hors du cadre de ce cours.

Le théorème 1 a beaucoup de corollaires de valeur. Faute de place, nous les exposerons sous forme de problèmes.

* * *

Pour tout élément a de $\mathcal{G}$, l'application (manifestement différentiable)

(13) $$\mathrm{int}_a : \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \quad x \mapsto axa^{-1}, \quad x \in \mathcal{G},$$

est un automorphisme de $\mathcal{G}$ qu'on appelle *automorphisme intérieur engendré par a*. La différentielle $d\,(\mathrm{int}_a)_e$ au point e de int_a est un opérateur linéaire inversible de $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$ dans $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$ qu'on note $\mathrm{Ad}\,a$. L'application

(14) $$\mathrm{Ad} : a \mapsto \mathrm{Ad}\,a$$

est une application (évidemment homomorphe) du groupe $\mathcal{G}$ dans le groupe $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ des opérateurs linéaires inversibles de l'espace vectoriel $\mathfrak{g} = \mathbf{T}_e\mathcal{G}$. Elle est connue sous le nom de *représentation adjointe* du groupe de Lie $\mathcal{G}$.

Problème 14. Montrer que *l'application* Ad *est différentiable.*

La différentielle au point e de Ad est notée ad. C'est l'application linéaire

$$\mathfrak{g} \to \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$$

de $\mathfrak{g}$ dans l'espace vectoriel $\mathfrak{l}\,(\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}) = \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ des applications linéaires $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Problème 15. Montrer que *quels que soient les éléments A et B de $\mathfrak{g}$, on a l'égalité*

(15) $$(\mathrm{ad}\,A)\,B = [A, B].$$

[*Indication.* L'application $s \mapsto \mathrm{Ad}\,(\beta_A(s))\,B$ étant une courbe dans un espace vectoriel, on a

$$[(\mathrm{Ad} \circ \beta_A)^{\cdot}\,(0)]\,B = \lim_{s \to 0} \frac{\mathrm{Ad}\,(\beta_A(s)) - \mathrm{Ad}\,e}{s}\,B,$$

et par suite de la formule générale (3), $\mathrm{ad}\,A = (\mathrm{Ad} \circ \beta_A)^{\cdot}\,(0)$,

$$\mathrm{Ad}\,(\beta_A(s))\,B = (\mathrm{int}_{\beta_A(s)} \circ \beta_B)^{\cdot}\,(0).$$

D'autre part, on a selon (12):

$$(16) \qquad (\operatorname{int}_{\beta_A(s)} \circ \beta_B)(t) = (\exp sA)(\exp tB)(\exp sA)^{-1} =$$
$$= \exp(tB + st[A, B] + \ldots),$$

donc, $\operatorname{Ad}(\beta_A(s))\, B = B + s[A, B] + \ldots$]

Problème 16. En déduire l'égalité

$$(17) \qquad \operatorname{Ad}(\exp A) = e^{\operatorname{ad} A}$$

pour tout élément $A \in \mathfrak{g}$. [*Indication.* Les deux courbes

$$t \mapsto \operatorname{Ad}(t \exp A) \quad \text{et} \quad t \mapsto e^{t \operatorname{ad} A}$$

sont des sous-groupes à un paramètre du groupe de Lie $\operatorname{Aut} \mathfrak{g}_{\text{lin}}$, qui possèdent pour $t = 0$ un même vecteur tangent, savoir $(d \operatorname{Ad})_e A = \operatorname{ad} A$.]

* * *

Problème 17. Soient u_A et u_B des courbes de $\mathcal{G}$ qui passent pour $t = 0$ par le point e et qui possèdent en $t = 0$ les vecteurs tangents A et B respectivement. Montrer que la courbe

$$t \mapsto u_A(t)\, u_B(t)$$

a en $t = 0$ le vecteur tangent $A + B$ et que le vecteur tangent en $t = 0$ à la courbe

$$t \mapsto u_A(\tau)\, u_B(\tau)\, u_A(\tau)^{-1}\, u_B(\tau)^{-1},$$

avec $\tau = \operatorname{sgn} t \cdot \sqrt{|t|}$, est $[A, B]$ (il s'agit donc dans le dernier cas d'une courbe différentiable C^1 en $t = 0$). [*Indication.* Avec l'hypothèse faite,

$$u_A(t) = \exp(tA + \ldots) \quad \text{et} \quad u_B(t) = \exp(tB + \ldots).$$

Par conséquent, la formule (12) implique

$$u_A(t)\, u_B(t) = \exp(t(A + B) + \ldots)$$

et

$$u_A(\tau)\, u_B(\tau)\, u_A(\tau)^{-1}\, u_B(\tau)^{-1} = \exp(t[A, B] + \ldots).]$$

Il en résulte en particulier que quels que soient les éléments $A \in \mathfrak{g}$ et $B \in \mathfrak{g}$, les éléments $A + B$ et $[A, B]$ sont les vecteurs tangents au point $t = 0$ aux courbes

$$t \mapsto \beta_A(t)\, \beta_B(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto \beta_A(\tau)\, \beta_B(\tau)\, \beta_A(\tau)^{-1} \beta_B(\tau)^{-1},$$

où β_A et β_B sont des sous-groupes à un paramètre associés à A et à B respectivement. Ce fait (joint à la formule (5)) décrit les opérations dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ en termes des sous-groupes à un paramètre.

* * *

On rappelle (voir leçon 13) qu'un groupe de Lie $\mathcal{H}$ est un *sous-groupe de Lie* (ou *sous-groupe différentiable*) d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ si $\mathcal{H}$ est contenu dans $\mathcal{G}$ et s'il est un sous-groupe et une sous-variété dans $\mathcal{G}$, i.e. si l'injection $\iota : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ est homomorphe, différentiable et constitue une immersion.

Il y a intérêt à donner un nom aux sous-ensembles d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ qui sont également des sous-groupes de $\mathcal{G}$ considéré comme groupe abstrait dont on néglige la topologie et la structure différentiable. Faute de mieux, nous parlerons dans ce cas des *sous-groupes abstraits.*

Ainsi, un sous-ensemble $\mathcal{H}$ d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ est par définition un sous-groupe de Lie si et seulement s'il est

a) un sous-groupe abstrait;

b) une sous-variété, i.e. une variété dans $\mathcal{G}$ telle que l'injection $\iota : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ constitue

b_1) une application différentiable;

b_2) une immersion (i.e. pour tout point $p \in \mathcal{H}$, l'application linéaire $(d\iota)_p : T_p\mathcal{H} \to T_p\mathcal{G}$ est monomorphe);

c) un groupe de Lie (la multiplication $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est une application différentiable).

Il s'agit en fait des conditions interdépendantes dont certaines peuvent être déduites des autres (ou sensiblement affaiblies). On sait par exemple (voir problème 5 de la leçon 13) qu'on n'exige b_1) et b_2) qu'en l'unité e du groupe $\mathcal{G}$ (un sous-groupe abstrait $\mathcal{H}$, groupe de Lie, est un sous-groupe de Lie si l'injection $\iota : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ est différentiable au point e et y est une immersion).

Problème 18. Démontrer qu'*un sous-groupe abstrait est un sous-groupe de Lie s'il est une sous-variété connexe* (étant donné la connexité, c) découle de a) et b)). [*Indication.* Cf. proposition 2 de la leçon 15.]

Problème 19. Démontrer que *la condition* b_2) *est une conséquence de* a), b_1) *et* c). [*Indication.* Il est clair que pour tout sous-groupe à un paramètre $\beta : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ d'un groupe de Lie $\mathcal{H}$, l'application $\iota \circ \beta : \mathbb{R} \to \mathcal{G}$ est (sous la condition b_1)) un sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$. D'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T_e\mathcal{H} & \xrightarrow{(d\iota)_e} & T_e\mathcal{G} \\ \Big\downarrow \exp & & \Big\downarrow \exp \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{G} \end{array}$$

Si l'application $(d\iota)_e$ n'est pas monomorphe, il existe donc un vecteur $A \neq 0$ dans le voisinage normal de l'élément zéro de $T_e\mathcal{H}$ tel que $\exp A = e$, égalité impossible.]

On suppose comme toujours que le monomorphisme $(d\iota)_e : T_e\mathcal{H} \to T_e\mathcal{G}$ est une injection, i.e. $T_e\mathcal{H} \subset T_e\mathcal{G}$.

Problème 20. Démontrer que *l'algèbre de Lie* $\mathfrak{h} = T_e\mathcal{H}$ *est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g} = T_e\mathcal{G}$.

Si $\mathcal{H}_e$ est la composante de l'unité d'un groupe de Lie $\mathcal{H}$ (et, partant, un groupe de Lie connexe), on a l'égalité évidente $T_e\mathcal{H}_e = T_e\mathcal{H}$. Ainsi, *une sous-algèbre de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g} = T_e\mathcal{G}$ *est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe connexe dès qu'elle est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Lie.*

Il se trouve qu'il existe une correspondance biunivoque entre les sous-groupes de Lie connexes de $\mathcal{G}$ et les sous-algèbres de $\mathfrak{g} = T_e\mathcal{G}$.

Théorème 2. *La correspondance*

un sous-groupe de Lie $\Rightarrow$ *son algèbre de Lie*

entre l'ensemble des sous-groupes de Lie connexes d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ *et l'ensemble des sous-algèbres de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g} = T_e\mathcal{G}$ *est biunivoque.*

Autrement dit, il existe pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de l'algèbre $\mathfrak{g}$ un (et un seul) sous-groupe de Lie connexe $\mathcal{H}$ tel que $T_e\mathcal{H} = \mathfrak{h}$.

La démonstration du théorème 2 s'avère simple sur le plan théorique, mais la technique en est assez compliquée. Aussi, on se borne aux points cruciaux, le détail étant exposé dans les problèmes et le texte en petits caractères.

* * *

Soit $\mathcal{X}$ une variété différentiable quelconque. Un fibré vectoriel différentiable $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{X})$ est un *sous-fibré* d'un fibré vectoriel différentiable $\xi' = (\mathcal{E}', \pi', \mathcal{X})$ si $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ et $\pi = \pi'|_{\mathcal{E}}$. Un sous-fibré est défini univoquement par $\mathcal{E}$, et on l'identifie de règle à cette variété.

Un rôle particulier incombe aux sous-fibrés du fibré tangent $\tau_{\mathcal{X}} = (T\mathcal{X}, \pi, \mathcal{X})$ qui s'appellent *distributions sur* $\mathcal{X}$. La fibre d'une distribution $\mathcal{E}$ quelconque au-dessus d'un point $p \in \mathcal{X}$ est le sous-espace $T_p\mathcal{X} \cap \mathcal{E}$ de l'espace tangent $T_p\mathcal{X}$. Nous noterons $\mathcal{E}_p$ cette fibre.

Conformément à la terminologie générale de la théorie des fibrés vectoriels (voir leçon 6), nous dirons que la dimension de l'espace $\mathcal{E}_p$ (la même pour tous les p) est le *rang* de la distribution $\mathcal{E}$.

Chaque distribution $\mathcal{E}$ définit sur $\mathcal{X}$ un champ $p \mapsto \mathcal{E}_p$ de sous-espaces $\mathcal{E}_p \subset T_p\mathcal{X}$.

Problème 21. Montrer que ce résultat établit une correspondance biunivoque entre les distributions de rang n et les champs différentiables de sous-espaces n-dimensionnels.

Ainsi, *les distributions et les champs différentiables de sous-espaces sont en fait la même chose.* [On considère, par exemple, toute connexion comme distribution (sur l'espace total $\mathcal{E}$ du fibré ξ).]

Une sous-variété $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ (qui n'est qu'immergée en général) est une *variété intégrale* d'une distribution $\mathcal{E}$ si $\mathbf{T}_p\mathcal{Y} \subset \mathcal{E}_p$ pour tout point $p \in \mathcal{Y}$. Une variété intégrale connexe est dite *maximale* si elle n'est contenue dans aucune variété intégrale connexe plus grande. Une distribution $\mathcal{E}$ de rang n est *complètement intégrale* si par chaque point de $\mathcal{X}$ il passe une variété intégrale maximale unique $\mathcal{Y}$ de dimension n (i.e. telle que $\mathbf{T}_p\mathcal{Y} = \mathcal{E}_p$) de $\mathcal{E}$.

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre quelconque de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe de Lie $\mathcal{G}$. Comme $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, l'algèbre $\mathfrak{h}$ est supposée formée de champs vectoriels invariants à gauche sur $\mathcal{G}$. Pour tout point $p \in \mathcal{G}$, on définit donc dans l'espace tangent $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$ le sous-espace $\mathfrak{h}_p$ des vecteurs X_p, $X \in \mathfrak{h}$. (Si l'on considère $\mathfrak{h}$ comme sous-espace de $\mathbf{T}_e\mathcal{G}$, le sous-espace $\mathfrak{h}_p$ n'est autre que l'image $(dL_p)_e\, \mathfrak{h}$ de $\mathfrak{h} \subset \mathbf{T}_e\mathcal{G}$ par l'application $(dL_p)_e : \mathbf{T}_e\mathcal{G} \to \mathbf{T}_p\mathcal{G}$.)

Problème 22. Démontrer que *la réunion $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$ de tous les sous-espaces $\mathfrak{h}_p$ est une distribution (de fibres $\mathfrak{h}_p$) sur $\mathcal{G}$.*

Si $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Lie connexe $\mathcal{H}$, alors $\mathcal{H}$ et toutes ses classes $a\mathcal{H}$ suivant $\mathcal{H}$ sont évidemment des variétés intégrales maximales de la distribution $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$, si bien que $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$ est complètement intégrable.

On démontrera plus loin que

A. *La distribution $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$ est complètement intégrable pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.*

Ce résultat aidant, soit $\mathcal{H}$ la sous-variété intégrale maximale contenant le point e de $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$.

Comme $a\mathcal{H} = L_a\mathcal{H}$ est pour tout $a \in \mathcal{H}$ la sous-variété intégrale maximale à élément a de $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$, l'unicité de ces sous-variétés des distributions complètement intégrables entraîne $a\mathcal{H} = \mathcal{H}$, ce qui veut dire que *$\mathcal{H}$ est un sous-groupe abstrait du groupe de Lie $\mathcal{G}$.*

On dit qu'une sous-variété $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ est *conservative* si, pour toute variété différentiable $\mathcal{Z}$, chaque application $\varphi : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$ est différentiable si et seulement si elle l'est en tant qu'une application dans $\mathcal{X}$ (i.e. il y a différentiabilité de $\iota \circ \varphi : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$, avec $\iota : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ une injection).

On conçoit que *chaque sous-variété plongée est conservative*, mais il existe des sous-variétés immergées qui le sont également. On démontrera notamment plus loin que

B. *Dans chaque groupe de Lie $\mathcal{G}$, toute sous-variété intégrale maximale d'une distribution complètement intégrable arbitraire est conservative.*

C'est le cas en particulier du sous-groupe $\mathcal{H}$. Par conséquent, la multiplication

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

est une application différentiable (puisqu'il en est ainsi pour sa composée avec l'injection $\mathcal{H} \to \mathcal{G}$), i.e. *$\mathcal{H}$ est un sous-groupe de Lie.*

L'algèbre de Lie du groupe $\mathscr{H}$ étant par construction la sous-algèbre $\mathfrak{h}$, cela démontre évidemment le théorème 2. □

Ainsi, il nous reste à prouver les assertions A et B.

* * *

Soit le cas A.

Soient $\mathscr{E}$ une distribution arbitraire sur la variété différentiable $\mathscr{X}$, et $\mathfrak{a}[\xi]$ l'ensemble des champs vectoriels $X \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$ tels que $X_p \in \mathscr{E}_p$ pour tout point $p \in \mathscr{X}$. Il est clair que $\mathfrak{a}[\mathscr{E}]$ est un sous-module de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}\mathscr{X}$ des champs vectoriels sur $\mathscr{X}$. La distribution $\mathscr{E}$ est dite *involutive* si $\mathfrak{a}[\mathscr{E}]$ constitue une sous-algèbre de $\mathfrak{a}\mathscr{X}$, i.e. si $[X, Y] \in \mathfrak{a}[\mathscr{E}]$ quels que soient les champs X et Y de $\mathfrak{a}[\mathscr{E}]$.

Problème 23. Montrer que *la distribution $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$ est involutive pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.*

Problème 24. Montrer que *s'agissant d'une distribution $\mathscr{E}$ quelconque de rang n, le module $\mathfrak{a}[\mathscr{E}]$ est un module localement libre de rang n*, i.e. il existe un recouvrement ouvert $\{U\}$ de $\mathscr{X}$ tel que le $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}U$-module $\mathfrak{a}[\mathscr{E}|_U]$, avec $\mathscr{E}|_U$ une restriction de $\mathscr{E}$ sur U, soit au-dessus de chaque $U \in \{U\}$ un module libre de rang n sur l'algèbre $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}U$. [*Indication.* On prend en qualité de U les voisinages trivialisants pour le fibré $\mathscr{E}$.]

Les bases du $\mathsf{F}_{\mathbb{K}}U$-module $\mathfrak{a}[\mathscr{E}|_U]$ s'appellent *bases sur U* du module $\mathfrak{a}[\mathscr{E}]$.

Problème 25. Démontrer *l'équivalence des propriétés suivantes de la distribution $\mathscr{E}$* :

a) *$\mathscr{E}$ est complètement intégrable*;

b) *la variété $\mathscr{X}$ admet un atlas de cartes $(U, x^1, \ldots, x^m)$, $m = \dim \mathscr{X}$, telles que chaque sous-variété dans U définie par les équations*

$$x^{n+1} = \text{const}, \ldots, x^m = \text{const} \tag{18}$$

soit une variété intégrale de $\mathscr{E}$;

c) *la variété $\mathscr{X}$ possède un atlas formé de cartes $(U, x^1, \ldots, x^m)$ telles que les champs vectoriels*

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

constituent une base de $\mathfrak{a}[\mathscr{E}]$ sur U.

[*Indication.* Les affirmations b) et c) sont évidemment deux énoncés d'un même résultat. L'implication a) ⇒ b) découle facilement des propriétés générales des sous-variétés (voir leçon III.13). Afin de démontrer b) ⇒ a), on munit $\mathscr{X}$ d'une topologie d'ensembles ouverts dont la base est formée de variétés intégrales de $\mathscr{E}$, et on examine les composantes de $\mathscr{X}$ pour cette topologie.]

Problème 26. Montrer que *la distribution $\mathscr{E}$ est involutive si et seulement s'il existe un recouvrement ouvert $\{U\}$ de la variété $\mathscr{X}$ tel que la base $X_1, \ldots, X_n$ sur chaque $U \in \{U\}$ du module* a $[\mathscr{E}]$ *présente la propriété suivante :*

$$[X_i, X_j] = f_{ij}^k X_k \quad \text{sur } U, \tag{19}$$

avec f_{ij}^k des fonctions différentiables sur U.

Les résultats des problèmes 23 et 24 montrent que l'intégrabilité complète et la propriété d'être involutif sont des *propriétés locales* (elles sont en vigueur partout dès qu'elles le sont au voisinage de chaque point).

Problème 27. Démontrer que *toute distribution complètement intégrable est involutive.* [*Indication.* Si les champs X et Y sont tangents à une sous-variété, il en est de même pour le champ $[X, Y]$.]

La réciproque est vraie elle aussi.

Théorème 3. *Chaque distribution involutive est complètement intégrable.*

C'est le *théorème de Frobenius*, et l'affirmation A en est une conséquence immédiate (voir problème 23). On passe donc à la démonstration du théorème énoncé

Les propriétés d'être complètement intégrable et involutif étant des propriétés locales, il suffit de démontrer la proposition purement analytique ci-dessous :

(*) *Soit donnés, dans un domaine $U \subset \mathbb{R}^m$ contenant le point 0, n champs vectoriels $X_1, \ldots, X_n$ qui sont linéairement indépendants sur l'algèbre* FU *et vérifient la condition* (19). *Dans un voisinage $V \subset U$ de 0 il existe des coordonnées $x^1, \ldots, x^m$ telles que les champs $X_1, \ldots, X_n$ sur V s'expriment linéairement (sur* FV) *par les champs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$.*

D é m o n s t r a t i o n. On suppose qu'il existe dans U des coordonnées $x^1, \ldots, x^m$ telles que

a) les champs $X_1, \ldots, X_{n-1}$ soient des fonctions des champs

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{m-1}} \text{ seuls;}$$

b) lorsque $x^m = 0$, les composantes $X_1^k, \ldots, X_{n-1}^k$, $n \leqslant k \leqslant m$, de ces champs soient identiquement nulles;

c) le champ X_n vérifie l'égalité

$$X_n = \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Il se trouve que dans ce cas $X_1, \ldots, X_n$ s'expriment linéairement (sur FU) en fonction des champs $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x^m}$.

En effet, on a $X_n^l = \delta_m^l$ par suite de c), si bien que

$$[X_n, X_j]^k = X_n^l \frac{\partial X_j^k}{\partial x^l} - X_j^l \frac{\partial X_n^l}{\partial x^l} = \frac{\partial X_j^k}{\partial x^m},$$

$$1 \leqslant j \leqslant n-1, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

et comme

$$[X_n, X_j] = f^1_{nj} X_1 + \ldots + f^{n-1}_{nj} X_{n-1}$$

selon a) et c), les composantes X^k_j, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $1 \leqslant k \leqslant m$, des champs $X_1, \ldots, X_{n-1}$ vérifient (en tant que fonctions de x^m) le système d'équations différentielles homogènes

$$\frac{\partial X^k_j}{\partial x^m} = f^1_{nj} X^k_1 + \ldots + f^{n-1}_{nj} X^k_{n-1}.$$

Ces fonctions, $n \leqslant k \leqslant m$, sont nulles pour $x^m = 0$ (conformément à b)). Aussi sont-elles identiquement nulles. Par conséquent, les champs $X_1, \ldots, X_{n-1}$ sont des fonctions linéaires des champs $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}$, ce qui fait que $X_1, \ldots$ $\ldots, X_{n-1}, X_n$ sont celles des $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x^m}$.

Ainsi, il suffit, pour avoir la proposition (★), de démontrer l'existence des coordonnées $x^1, \ldots, x^m$ douées des propriétés a), b) et c) (et de désigner ensuite x^m par x^n). On procède par récurrence sur n.

Quand $n = 1$, les conditions a), b) n'ont pas de sens (non plus que la condition d'être involutif (19)). La seule chose à démontrer est donc l'existence, pour X quelconque non nul en 0, d'une carte $(V, x^1, \ldots, x^m)$ centrée en 0 telle que

$$X = \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Soient $x^1, \ldots, x^m$ des coordonnées quelconques sur $\mathbb{R}^m$ (ou au moins sur U). On suppose sans restreindre la généralité que la m-ième composante X^m du champ X est $\neq 0$ en 0. On choisit un nombre $\varepsilon > 0$. Soit W un voisinage du point 0 de $\mathbb{R}^{m-1}$ (identifié au sous-espace $x^m = 0$ de $\mathbb{R}^m$) tel que $W \subset \subset \mathbb{R}^{m-1} \cap U$ et que pour tout point $\mathrm{w} \in W$, $\mathrm{w} = (w^1, \ldots, w^{m-1})$, la courbe intégrale γ_{w} du champ X passant par $(\mathrm{w}, 0) \in \mathbb{R}^m$ pour $t = 0$ soit définie pour $|t| < \varepsilon$. (Le voisinage W existe en vertu des théorèmes usuels de la théorie des équations différentielles ordinaires). L'application $W \times]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^m$ envoyant (w, t) dans $\gamma_{\mathrm{w}}(t)$ est différentiable, et la matrice jacobienne associée au point $(0, 0)$ s'écrit

$$\left\| \begin{array}{c:c} E & \begin{matrix} X^1(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X^{m-1}(0) \end{matrix} \\ \hdashline 0 \ldots 0 & X^m(0) \end{array} \right\|.$$

L'application $(\mathrm{w}, t) \mapsto \gamma_{\mathrm{w}}(t)$ est donc étale en $(0, 0)$ par suite de $X^m(0) \neq 0$, si bien qu'il existe dans $\mathbb{R}^m$ un voisinage V du point 0 où $w^1, \ldots, w^{m-1}, t$ sont des coordonnées locales. Ce faisant, on a $X = \frac{\partial}{\partial t}$ dans V. Si l'on introduit les notations convenables pour $w^1, \ldots, w^{m-1}, t$, on aura le résultat voulu.

[Nous avons en fait démontré de façon ordinaire le *théorème des trajectoires rectifiables* d'un champ vectoriel au voisinage de tout point où ce champ est non nul.]

Poursuivons nos raisonnements. On suppose que (★) est juste pour $n-1$ champs et on démontre qu'il existe pour n champs $X_1, \ldots, X_n$ les coordonnées $x^1, \ldots, x^m$ assujetties à a), b) et c).

On applique à X_n le théorème ci-dessus, ce qui donne de suite la condition c). On remplace $X_1, \ldots, X_{n-1}$ par

$$X_1 - X_1^m \frac{\partial}{\partial x^m} = X_1 - X_1^m X_n, \ \ldots, \ X_{n-1} - X_{n-1}^m \frac{\partial}{\partial x^m} = X_{n-1} - X_{n-1}^m X_n,$$

d'où la condition a). On peut donc supposer dès le commencement (sans nuire à la généralité) qu'on est dans les conditions a) et c). Le problème consiste à obtenir b).

Soient $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ les restrictions à $U \cap \mathbb{R}^{m-1}$ des champs $X_1, \ldots, X_{n-1}$ (i.e. ce sont les valeurs de ceux-ci pour $x^m = 0$). Ces champs vérifient évidemment (sur $U \cap \mathbb{R}^{m-1}$) l'égalité (19), si bien qu'il existe par hypothèse de récurrence une carte $(W, y^1, \ldots, y^{m-1})$, $W \subset U \cap \mathbb{R}^{m-1}$, telle que $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ s'expriment linéairement sur W en fonction des champs $\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{n-1}}$, si bien qu'en coordonnées $y^1, \ldots, y^{m-1}$ (i.e. dans la base $\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{m-1}}\Big)$, leurs composantes $Y_1^k, \ldots, Y_{n-1}^k$, $n \leqslant k \leqslant m-1$, sont identiquement nulles. S'agissant de $X_1, \ldots, X_{n-1}$, cela signifie que $X_1^k, \ldots, X_{n-1}^k$, $n \leqslant k \leqslant m-1$, sont nulles pour $x^m = 0$ dans le système de coordonnées $y^1, \ldots, y^{m-1}, x^m$ (définies sur V de la forme $W \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$ un nombre suffisamment petit), i.e. que la condition b) est remplie pour $y^1, \ldots, y^{m-1}, x^m$. Du moment que les conditions a) et c) le sont évidemment pour les coordonnées $y^1, \ldots, y^{m-1}, x^m$, le théorème de Frobenius est démontré *in extenso*. □

Remarque 2. Puisque la propriété d'être involutif a trait aux sous-algèbres des algèbres de Lie $\mathfrak{a}\mathscr{X}$, la variété $\mathscr{X}$ du théorème de Frobenius a été supposée de classe C^∞. Or, *ce théorème est juste pour les variétés de classe* C^r, $r \geqslant 2$, à condition d'assimiler la propriété mentionnée à (19) avec f_{ij}^k de classe C^{r-1}.

* * *

Voyons maintenant l'affirmation B.

Problème 28. Démontrer que *la variété intégrale maximale* $\mathscr{Y}$ *d'une distribution complètement intégrable, qui vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité, est conservative.* [*Indication.* Chaque point $p \in \mathscr{Y}$ possède dans $\mathscr{X}$ un voisinage de coordonnées tel que les composantes de l'intersection $U \cap \mathscr{Y}$ (pour la topologie de $\mathscr{Y}$) soient données par les équations de la forme (18), et ces composantes sont au plus dénombrables. Aussi, sont-elles également les composantes des intersections $U \cap \mathscr{Y}$ pour la topologie de $\mathscr{X}$.]

Problème 29. Démontrer que *tout groupe de Lie connexe vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité.* [*Indication.* Choisir dans un voisinage U de l'unité un ensemble partout dense dénombrable C et considérer tous les voisinages gV, où $V \subset U$ et g est un produit quelconque d'éléments de C.]

Les deux derniers problèmes entraînent de suite qu'il suffit, pour

avoir B, de démontrer la proposition suivante (qui a certes son intérêt propre).

Proposition 2. *Soit $\mathscr{Y}$ une sous-variété de $\mathscr{X}$. Si*

a) *$\mathscr{Y}$ est connexe,*

b) *$\mathscr{X}$ vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité,*

alors la sous-variété $\mathscr{Y}$ le vérifie elle aussi.

Le point épineux est en l'occurrence le cas de $\mathscr{Y}$ immergée, car la proposition est triviale pour l'injection (chaque sous-espace d'un espace obéissant audit axiome le vérifie évidemment). La démonstration sera faite une fois de plus à travers les problèmes.

Problème 30. Démontrer que *si un espace topologique connexe $\mathscr{X}$ admet un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ tel que*

1° *chaque ensemble U_α vérifie pour la topologie induite le deuxième axiome de dénombrabilité;*

2° *quel que soit α, la famille des éléments de $\mathfrak{U}$, qui rencontrent U_α, soit dénombrable (ou finie),*

alors l'espace $\mathscr{X}$ satisfait au deuxième axiome de dénombrabilité. [*Indication.* Choisir un élément quelconque U_{α_0} de $\mathfrak{U}$ et considérer toutes les suites finies $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ d'éléments de $\mathfrak{U}$ telles que $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_{i-1}} \neq \varnothing$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Montrer que la réunion des éléments de ces suites vérifie l'axiome en question et coïncide avec $\mathscr{X}$.]

Problème 31. Démontrer qu'*un espace topologique connexe $\mathscr{X}$ satisfait au deuxième axiome de dénombrabilité s'il possède un recouvrement ouvert dénombrable $\{U_i\}$ dont chaque U_i est réunion d'ensembles ouverts disjoints U_{i,α_i} vérifiant ledit axiome.* [*Indication.* Le recouvrement $\{U_{i,\alpha_i}\}$ formé de tous les ensembles U_{i,α_i} satisfait aux conditions du problème 30.]

Remarque 3. Il en résulte de suite que *tout espace $\mathscr{E}$, revêtement de $\mathscr{B}$ qui obéit au deuxième axiome de dénombrabilité, vérifie l'axiome en question.* (Les images réciproques des éléments d'un recouvrement dénombrable de l'espace $\mathscr{B}$ composé d'ensembles bien recouverts constituent un recouvrement de $\mathscr{E}$ qui jouit des propriétés énoncées dans le problème 31.)

Une application $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est *localement homéomorphe* s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de l'espace $\mathscr{X}$ tel que

a) l'ensemble $f(U_\alpha)$ soit ouvert dans $\mathscr{Y}$;

b) l'application f sur U_α soit l'homéomorphisme $U_\alpha \to f(U_\alpha)$ pour tout α.

Problème 32. Démontrer que *s'il existe pour un espace topologique connexe $\mathscr{X}$ une application localement homéomorphe*

$$f : \mathscr{X} \to \mathbb{R}^n,$$

alors $\mathscr{X}$ vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité. [*Indication.* Soit $\{V_i\}$ une base dénombrable de $\mathbb{R}^n$ formée d'ensembles ouverts connexes, et soit U_i une partie (éventuellement vide) de l'espace $\mathscr{X}$,

qui est réunion d'ensembles chacun desquels est appliqué homéomorphiquement par f sur V_i. Les sous-ensembles U_i constituent un recouvrement de $\mathscr{X}$ qui remplit les conditions du problème 31.]

Problème 33. Utiliser le problème 32 et démontrer la proposition 1 pour $\mathscr{X} = \mathbb{R}^n$, puis dans le cas général. [*Indication*. Se référer dans le dernier cas au problème 30.]

Ainsi, les affirmations **A** et **B** (donc le théorème 3) sont complètement démontrées. □

* * *

Le fait que chaque sous-groupe de Lie est une variété intégrale d'une distribution complètement intégrable entraîne de suite l'affirmation suivante (nous l'érigeons en une proposition afin de s'y référer facilement).

Proposition 3. *Chaque sous-groupe de Lie dont les composantes forment un ensemble au plus dénombrable, est une sous-variété conservative.* □

Si l'on prend, par exemple, le sous-groupe $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ avec la topologie discrète, on voit que la dénombrabilité de l'ensemble des composantes constitue une condition nécessaire.

Ci-dessous deux conséquences immédiates.

Corollaire 1 (théorème d'unicité). *Si l'on munit un sous-groupe abstrait $\mathscr{H}$ d'un groupe de Lie $\mathscr{G}$ d'une structure de sous-variété dont les composantes forment un ensemble au plus dénombrable, par rapport à laquelle $\mathscr{H}$ est un sous-groupe de Lie, on le fait d'une seule manière.*

Démonstration. Soient $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ deux sous-groupes de Lie qui s'identifient en tant que sous-ensembles à $\mathscr{H}$ et dont les composantes forment un ensemble dénombrable (ou fini). Il faut démontrer que $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$, i.e. que les structures différentiables sur $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ sont les mêmes. Une condition suffisante en est que les identités $\mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ et $\mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_1$ soient différentiables. Or, la proposition 3 le garantit immédiatement. □

Corollaire 2. *L'application $\beta: \mathbb{R} \to \mathscr{H}$ est un sous-groupe à un paramètre d'un sous-groupe de Lie $\mathscr{H}$ si et seulement si $\iota \circ \beta: \mathbb{R} \to \mathscr{G}$ est un sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie $\mathscr{G}$.* □

Problème 34. Donner une démonstration immédiate de la dernière affirmation. [*Indication*. Utiliser les coordonnées normales.]

INDEX

